

Álgebra Linear
com apoio computacional

Tarcisio Praciano-Pereira¹

Edições Eletrônicas do
Laboratório de Matemática Computacional
Departamento de Matemática
Universidade Estadual Vale do Acaraú
29 de março de 2008

¹Univ. Est. Vale do Acaraú - Ce

Sumário

Introdução	2
I Vetores e sistemas de equação	5
1 Números complexos	7
1.1 incompletude, \mathbf{R}	7
1.1.1 números complexos	8
1.1.2 A representação geométrica dos complexos	11
1.2 Números complexos: extensão dos reais	14
1.3 Módulo, argumento e conjugado	19
1.4 Interpretação geométrica do produto	20
1.4.1 Para melhorar a arte de fazer contas	24
2 Matrizes	25
2.1 Matrizes	25
2.1.1 Um exemplo algébrico	26
2.1.2 Significado geométrico da multiplicação	31
2.1.3 As matrizes	32
2.1.4 O contórno inicial da teoria	32
2.1.5 Matrizes, a notação	33
2.1.6 A parte computacional da álgebra	33
2.1.7 A multiplicação de matrizes não é comutativa	37
2.1.8 Matriz transposta	39
2.2 Matrizes como funções do \mathbf{R}^2	42
2.2.1 As matrizes 2×2	42
2.2.2 Matrizes generalizam a multiplicação	43
2.3 Funções lineares afins	50
2.4 Sistemas lineares	53
2.4.1 Equações lineares	53
2.5 Exercícios: sistemas lineares	61
3 Vetores	65
3.1 O espaço \mathbf{R}^2	65
3.1.1 A estrutura algébrica de \mathbf{R}^2	65

3.2	Dependência linear	71
3.2.1	Dependência linear	74
3.3	Dimensão	78
3.4	O \mathbf{R}^4 tem dimensão quatro	81
3.5	O $\mathbf{R}_3[x]$ tem dimensão quatro	84
3.6	Isomorfismo	87
3.6.1	O isomorfismo $\mathbf{R}^4 \cong \mathbf{R}_3[x]$	87
3.6.2	\mathbf{R}^n - o paradigma da dimensão finita	91
3.7	Morfismos de espaços vetoriais	95
3.8	Dimensão e variedade	96
3.8.1	Hiperplano e hipersuperfície no \mathbf{R}^4	99
3.8.2	Um pouco sobre classificação de variedades	99
4	Sistemas de equações lineares	103
4.1	O Teorema da imagem e do núcleo	103
4.1.1	A imagem de uma matriz como função linear	103
4.1.2	Espaço vetorial afim	108
4.2	A solução de uma equação linear	108
4.2.1	Quando $\dim(\text{Ker}(T)) = 0$	111
4.3	Independência linear das soluções	111
4.4	Base e matriz	112
4.5	Exercícios resolvidos	114
II	Decomposição de matrizes	119
5	Autovalores	123
5.1	Autovalor e autovetor	123
5.1.1	Primeiros exemplos de autovalor e autovetor	123
5.1.2	Autovalor: a definição e o método	127
5.1.3	Estrutura dos autovetores associados a autovalores	129
5.2	Exercícios sobre autovalor e autovetor	134
6	Formas especiais	137
6.1	A semelhança de matrizes	137
6.1.1	O projeto	139
6.1.2	Semelhança entre matrizes	139
6.1.3	Discutindo as experiências do <i>laboratório</i>	147
6.2	Matrizes singulares e não singulares	154
6.3	Mudança de base e mudança de matriz	158
III	Solução dos exercícios	161
7	soluções	163
7.1	Propriedades das funções lineares afins	163

7.2	Sistemas lineares - Solucao dos exercicios	164
7.3	Estrutura do \mathbf{R}^2 - Solucao dos exercicios	167
7.4	Espaço vetorial - Solução de alguns exercicios	170
7.5	Sistemas Lineares- solucao	180
7.6	Matrizes não singulares-Solucao dos exercicios	185
7.7	Mudança de base - solucao.	196
7.8	Operações elementares	201
7.9	Matriz diagonal	201
7.10	Equivalência de matrizes e operacoes linha-soluções	213
	Bibliografia	i
	Bibliografia	i

Lista de Figuras

1.1	Representação geométrica dos complexos	10
1.2	Produto de números complexos	10
1.3	12
1.4	Propriedades dos números complexos	14
1.5	Conjugado de um número complexo	17
1.6	A projeção de $a + bi$ sobre \mathbf{S}^1	20
2.1	Multiplicação por i provoca uma rotação de $\frac{\pi}{2}$	45
2.2	Rotação e homotetia seguidas de uma translação	52
2.3	Experimentos com massa e momento	62
2.4	Distribuição de forças numa estrutura metálica	63
3.1	três vetores não colineares dois a dois formam um triângulo	71
3.2	Vetores colineares são linearmente dependentes	75
4.1	. Espaços de saída e de chegada	109
4.2	Translação do núcleo	112
5.1	Matriz de mudança de base	132
7.1	Cálculo do determinante com octave	171

Introdução.

Recomendamos que você não leia agora esta *introdução*, até mesmo porque ela foi feita quase que depois de o livro ficar pronto... ou talvez, porque você já começou, que a leia rapidamente, talvez marcando alguns trechos que não entender, para reler depois. Se a introdução estiver clara, certamente você não precisa ler o livro. Se o livro lhe for útil, a introdução ficará absolutamente clara, depois.

Até pensamos em colocar a *introdução* ao final, mas aí correríamos o risco de que ela ficasse perdida, definitivamente. Talvez a maior importância desta conversa inicial resida na oferta que fazemos de um trabalho interativo, do leitor, com os autores. Use o nosso endereço eletrônico que aparece em vários locais no texto, fale conosco, diga-nos quando o texto não estiver claro, ou nos faça suas sugestões. Claro, como na parábola do *homem, do burro e da criança*, nem sempre poderemos aceitar todas as sugestões, por mais importante e próprias que sejam, sem descaracterizar o nosso trabalho.

Não pretendemos que este livro seja *autocontido*, embora desejemos que ele possa ser útil ao *autodidata*, ele foi escrito como uma ferramenta de apoio ao trabalho do professor, seja em aula presencial seja em ensino à distância. Em particular, os autores se declaram à disposição do leitor para responder questões ligadas com o texto. Use com liberdade o endereço

tarcisio@member.ams.org

para discutir a teoria, as questões, apresentar suas críticas, e, se desejar, participar desta equipe. Este é um trabalho aberto.

Supomos que a disciplina Álgebra Linear esteja sendo ministrada posteriormente, ou no máximo concomitantemente, com Cálculo II, (Cálculo multivariado). Faremos uso dos conceitos da Geometria Analítica e do Cálculo sempre que isto puder tornar os conceitos e os exemplos mais interessantes.

Faremos uso da geometria na interpretação gráfica e nas interpretações das aproximações computacionais. Desta forma entendemos que trazemos uma visão, *utilitarista*¹ da geometria.

O título de cada seção deve mostrar o seu objetivo:

- transformar para o ver o efeito de uma função,
- usar transformações lineares para esclarecer o significado da derivada,
- e comparar o “exato” com a aproximação obtida.

são alguns métodos geométricos aqui empregados.

Trata-se assim de uma análise do efeito, através da transformação *geométrica* produzida, porque em grande parte a *Álgebra Linear* é geometria, apenas uma geometria de *dimensão maior* do que esta geometria de dimensão três, (ou quatro), em que vivemos.

No Cálculo, a visão geométrica, consiste em dominar os gráficos das curvas e superfícies “algébricas” fundamentais para com elas comparar com as outras cujos gráficos nem sequer sabemos fazer. Na *Álgebra Linear* queremos tornar

¹que horror...

intuitiva a generalização das retas, dos planos, a dimensões maiores, ou menores, no caso do ponto (como objeto linear). Em ambos os casos, no Cálculo ou na *Álgebra Linear*, existe uma questão dimensional cujos aspectos *intuitivos* é preciso romper ou enlargar.

Um aspecto central da *Álgebra Linear* é a resolução de sistemas de equações (lineares) e da análise destes sistemas (lineares) transferido para a análise das matrizes, que são *multinúmeros* guardando a informação das equações. As equações lineares são consideradas fáceis, até mesmo porque elas podem de fato ser resolvidas automaticamente, por programas de computador. Depois elas serão utilizadas em *linearizações das equações não lineares*, uma aproximação.

Apoio computacional

O adjetivo *computacional*, no título, significa que faremos uso de um pacote computacional, **scilab**, para realizar os fatos da Álgebra Linear. É preciso que fique claro o que significa para nós, computação. Um programa de computador, o próprio computador, são instrumentos com que podemos andar mais rápido e, algumas vezes, fazer aquilo que nos seria impossível fazer à mão. Você logo vai ver que existem operações que nos tomariam dias para executá-las manualmente, fora as possibilidades de erro deste exercício. Entretanto, *nada do que fazemos com o computador* pode ser porque *não sabemos fazer à mão*. Isto representaria automatização inócua. A adoção do **scilab** foi feita pelas seguintes razões:

1. É um programa distribuído sob a licença GPL, ver

<http://www.gnu.org>
<http://www.scilab.org>

para entender melhor do que se tratam programas livres, como **scilab**.

2. É um programa de alta qualidade, bem documentado, e que se encontra possivelmente instalado em qualquer computador rodando **Linux**, de formas que qualquer aluno que quiser, poderá ter acesso a este programa sem gastar nenhum centavo extra, além do que tiver gasto para obter o seu computador e o sistema operacional.
3. Se **scilab** não estiver instalado, facilmente você o pode obter no site

<http://www.scilab.org>

scilab se auto-define como similar a um outro programa comercial dedicado a Álgebra Linear, quer dizer que, com **scilab** podemos fazer as contas da Álgebra Linear, podemos resolver equações lineares. Há outros programas também distribuídos sob a licença GPL, *octave* e um exemplo, e pode ser obtido em

<http://www.octave.org>

scilab e *octave* são similares, de modo que a qualquer momento do texto, onde estiver escrito **scilab** você poderá ler como se estivesse *octave*, que é um outro programa, também de domínio público, e da mesma qualidade que este que adotamos como *programa oficial* do livro. **scilab** é distribuído para várias outras plataformas, ver no site do **scilab** citado acima.

Como usar este livro

*Que é Álgebra
Linear ?*

scilab

*apoio
computacional*

Queremos chamar sua atenção para algumas convenções de redação. Há dois tipos de texto que pretendem chamar sua atenção para detalhes, sem desviar sua atenção do objetivo principal. Um dos tipos se chama claramente “observação”, o outro são as notas de rodapé.

Os comentários, o texto teórico, são de nossa consideração, o material mais importante do livro, mas nem sempre o mais fácil. Sugerimos que você inicialmente dê menos importância à teoria, e se concentre nos exercícios.

Talvez você deva ler as observações na ordem em que elas aparecerem, mas sem lhes dar muita importância, numa primeira leitura. Para lhe permitir uma busca mais acurada de informações, o livro tem um índice remissivo alfabético ao final em que todos os conceitos se encontram *indexados* de forma que você poderá facilmente retornar a eles quando achar necessário. Também se encontram *indexadas* todas as palavras-chave do texto.

Os exercícios foram escritos para serem feitos com auxílio de uma *teoria mínima*. A própria teoria deve surgir dos exercícios. Ao mesmo tempo os exercícios fazem parte integrante do texto no sentido de que eles sempre serão utilizados mais a frente. Quase todos os exercícios podem ser resolvidos em mais de um nível, e você deve resolvê-los no nível que puder, e depois tentar aprofundar a solução.

Mas não despreze totalmente a teoria, nela há dicas de como se aprofundar na solução dos exercícios.

Este livro tem defeitos, erros. Alguns deles foram deixados *propositadamente*, para serem usados como alerta ou para chamar a atenção do leitor de melhorias que podem ser introduzidas, ou ainda, por que, falar com absoluta correção, algumas vezes, não é o mais didático. Destes nós chamaremos sua atenção, no momento certo. Outros fugiram, simplesmente, a análise dos autores, destes, os autores agradecem que os leitores lhes chamem a atenção para que eles sejam corrigidos ou, melhor, usados como material didático: *nada melhor do que um erro para se dar um salto qualitativo*.

Usamos uma convenção tipográfica no livro, *texto em itálico* representa material que você deve olhar com cuidado, possivelmente não está definido ainda e estamos usando a concepção intuitiva do termo. Quando usarmos **texto tipográfico** estaremos fazendo referência a um termo técnico, já definido anteriormente ou considerado bem conhecido como tal. Quando usarmos letra pequena estamos lhe querendo dizer que o assunto é polêmico e que há muito mais coisa para ser dito do que estamos conseguindo dizer naquele momento, *é como se estivessemos lhe cochichando ao ouvido*. Usamos texto sublinhado para chamar sua atenção de um detalhe que poderia passar despercebido, tem o mesmo sentido o **texto em negrito**.

Parte I

Vetores e sistemas de
equação

Capítulo 1

O plano complexo

No esforço para resolver equações que nos tempos modernos se pode dizer que começa com Cardano e seus contemporâneos no século 16. Cardano mesmo não conhecia os números complexos mas fez uma operação incluindo raiz quadrada de número negativo que é reconhecida com um dos primeiros passos na descoberta destes números.

Como o próprio nome registra, os matemáticos criaram aos poucos uma entidade estranha, chamada número imaginário, que apareceu como solução da equação do segundo grau.

Com os números imaginários se criaram os “números complexos” outro tipo estranho que funcionava muito muito bem como se fosse um número... o resultado é um objeto geométrico que vamos usar aqui como modelo de vetor.

Os números complexos são assunto ainda da Matemática Elementar, aqui nós os vamos recordar com um sabor de Matemática Universitária e assim utilizá-los como uma introdução aos vetores, porque eles são vetores desde sua origem.

1.1 Incompletitude algébrica de \mathbb{R}

A fórmula para resolver equações do segundo grau produz a solução

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \Delta = b^2 - 4ac, \quad (1.1)$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad (1.2)$$

Se Δ for negativo a equação não tem soluções reais. Aos poucos os matemáticos foram experimentando a idéia de aceitar um significado para $\sqrt{\Delta}$; $\Delta < 0$ começando com uma pequena experiência, $i = \sqrt{-1}$ estendendo a regra estrita sobre raízes:

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y} \quad (1.3)$$

que valia apenas quando $x, y \geq 0$. Com esta extensão se poderia calcular

$$\sqrt{-4} = \sqrt{-1}\sqrt{4} = i \cdot 2 \quad (1.4)$$

e enfim qualquer raiz de número negativo poderia agora ser calculada.

Em particular, as equações do segundo grau passam a ter sempre solução

apesar de que, cuidadosamente, se acrescente a observação, “raízes imaginárias” quando $\Delta < 0$.

Exemplo 1 *Resolvendo uma equação do segundo grau*

$$4x^2 - 12x + 25 = 0 \Rightarrow \Delta = -256$$

$$x' = \frac{12+16i}{8}; x'' = \frac{12-16i}{8}$$

$$x' = \frac{3}{2} + 2i; x'' = \frac{3}{2} - 2i$$

em que vemos aparecer um “número” do tipo

$$z = a + bi, \tag{1.5}$$

formado por um par de números reais separados pela *unidade imaginária* \boxed{i} .

Um “número” desta forma se chama “número complexo” e foram precisos vários séculos para que eles fossem admitidos como um número comum, *sem complexos*.

1.1.1 Álgebra dos números complexos

Repetindo o que fizeram os nossos antepassados, os números complexos foram inicialmente tratados como uma expressão algébrica em que \boxed{i} era considerado como uma “variável” mas obedecendo a regra

$$\boxed{\sqrt{-1} = i \iff i^2 = -1.} \tag{1.6}$$

Assim, $z = 2 + 3i, w = 5 - 2i$ são somados segundo as regras da álgebra:

- “quem tem “i” é somado com quem tem “i”
- e os que não tiverem “i” são somados entre si”:

$$z + w = (2 + 3i) + (5 - 2i) = (2 + 5) + (3 - 2)i = 7 + i$$

e de maneira idêntica se procede com a multiplicação:

$$(2 + 3i)(5 - 2i) \tag{1.7}$$

2	+3i		
5	-2i		
10	15i		
	-4i	-6i ²	
10	+11i	-6(-1)	
16	+11i		

veja a figura (1.2) na página 10.

Usando estas regras da álgebra podemos escrever uma definição formal para a adição e para a multiplicação de números complexos. Primeiro vamos banir a expressão “quem tem i ” do texto porque ela não é uma *expressão técnica* e nós somos extremamente ligados em *expressões técnicas*.

Definição 1 *Parte real e imaginária de um número complexo*

Dado um número complexo, escrito como

$$z = a + bi \equiv (a, b)$$

designaremos

$$\Re(z) = a \text{ a parte real de } z \quad (1.8)$$

$$\Im(z) = b \text{ a parte imaginária de } z \quad (1.9)$$

Definição 2 (Adição de números complexos) *Dados dois números complexos*

$$v = a + bi \equiv (a, b) \quad (1.10)$$

$$w = c + di \equiv (c, d) \quad (1.11)$$

definimos

$$v + w = (a + c, b + d) \quad (1.12)$$

$$\equiv v + w = (a + c) + (b + d)i \quad (1.13)$$

a soma se faz “coordenada por coordenada”, ou ainda

$$\Re(v + w) = \Re(v) + \Re(w) \quad (1.14)$$

$$\Im(v + w) = \Im(v) + \Im(w) \quad (1.15)$$

As duas formas

$$a + bi, (a, b)$$

são equivalentes e usamos uma ou a outra conforme for mais conveniente:

$$\boxed{\text{expressão algébrica}} \quad \mathbf{C} \ni w = c + di \equiv (c, d) \in \mathbf{R}^2 \quad \boxed{\text{entidade geométrica.}} \quad (1.16)$$

Observe que a última parte, na expressão acima, $(c, d) \in \mathbf{R}^2$, é uma *representação geométrica* para os números complexos, uma vez que estamos dizendo que existe um ponto do plano,

$$(c, d) \in \mathbf{R}^2 \quad (1.17)$$

que é “equivalente” ao número complexo

$$c + di \in \mathbf{C}. \quad (1.18)$$

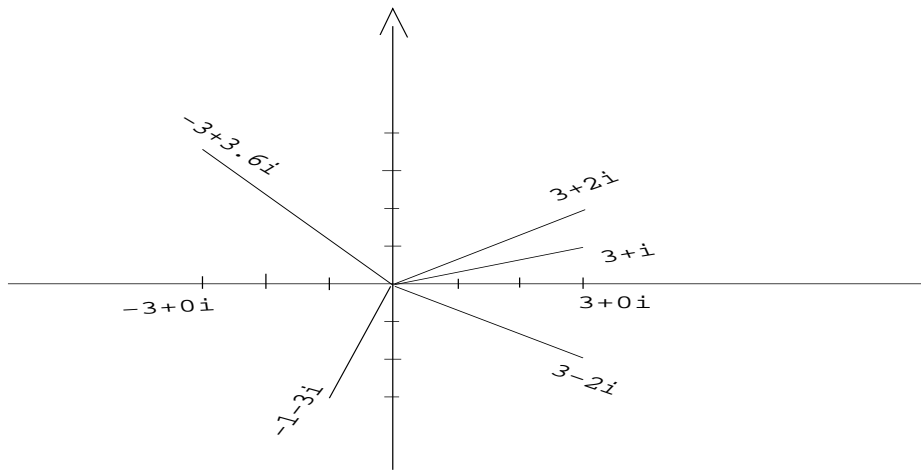


Figura 1.1: Representação geométrica dos complexos

Quando foi descoberta a *representação geométrica* para os números complexos, um *salto qualitativo* foi dado. Como eles tinham uma *representação geométrica*, não podiam ser tão estranhos, *imaginários*, como no começo pareciam. Veja a figura (1.1).

Definição 3 *Produto de números complexos*

Dados dois números complexos $z = a + bi, w = c + di$ o produto deles é:

Multiplicação de números complexos

$$\begin{array}{r}
 \mathbf{a + bi} \\
 \begin{array}{c} \downarrow \quad \swarrow \quad \downarrow \\ \mathbf{c + di} \end{array} \\
 \hline
 \mathbf{(ac - bd) + (ad + bc)i}
 \end{array}$$

Figura 1.2: Produto de números complexos

$$(ab - bd) + (ad + bc)i$$

1.1.2 A representação geométrica dos complexos

Falamos acima na equivalência

$$\mathbf{C} \ni w = c + di \equiv (c, d) \in \mathbf{R}^2, \quad (1.19)$$

o par (c, d) é um ponto do plano e, assim, estamos *representando* um número complexo com uma entidade geométrica, um ponto.

Os números complexos trouxeram, para o reino dos números, os conceitos da geometria: ângulo, módulo, direção e sentido. A Física, desde cedo, lançou mão deles, com muito sucesso, por exemplo, na eletricidade.

A figura (1.3) na página 12 descreve alguns aspectos geométricos dos números complexos, como o módulo e o argumento.

- o vetor z O ponto do plano, $z = (a, b)$ determina com a origem um segmento de reta que identificamos, também, com o número complexo z e que vamos chamar de *vetor*;
- argumento de z é o ângulo que o *vetor* z determina com o semi eixo positivo OX , no sentido anti-horário, partido do semi-eixo OX . Notação $\arg(z)$
- módulo de $z = (a, b)$ é o comprimento do segmento de reta que subentende o vetor z . Notação

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

pelo teorema de Pitágoras;

A próxima lista é um *laboratório* que deve preparar a sua intuição para as construções que faremos depois.

Laboratório 1 (O plano complexo) *A interpretação geométrica*

1. *Encontre as soluções da equação: $x^2 - 3x + 1 = 0$.*
2. *Encontre as soluções da equação: $x^2 + 1 = 0$.*
3. *Verifique, experimentando na equação, que os números $i, -i$ são soluções da equação $x^2 + 1 = 0$.*
4. *Some algebricamente e represente geometricamente: $u+v$;*
 - a) $u = 3 + 2i; v = 2 + 3i$ b) $u = 3 - 2i; v = 3 + 2i$
 - c) $u = 3 + 2i; v = -3 - 2i$ d) $u = 3 - 2i; v = 2i - 3$
 - e) $u = 2i - 3; v = 3 - 2i$ f) $u = 2 - 3i; v = 3i - 2$
5. *Efeitos da multiplicação*
 - (a) *Multiplique $3+2i$ pelos inteiros $2, 3, 5, 10$. Represente geometricamente os resultados.*

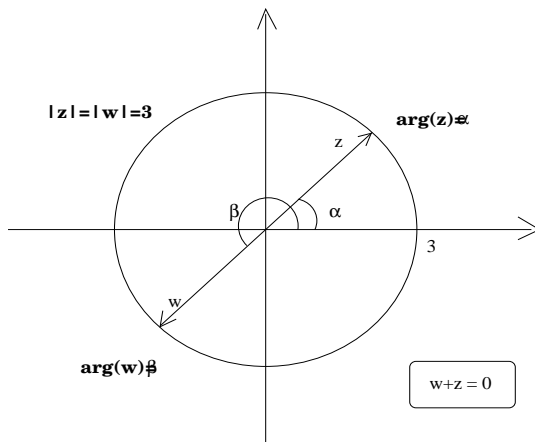


Figura 1.3:

- (b) Multiplique $3 + 2i$ por $2i$, $3i$, $5i$, $10i$. Represente geometricamente os resultados. Elabore uma teoria a partir da semelhança dos resultados obtidos.
6. Verifique que o número complexo $1 + 0i$ é o elemento neutro da multiplicação.
 7. Calcule o inverso multiplicativo de $3 + 2i$ e represente ambos geometricamente.
 8. Multiplique $z = 3 + 2i$ por si próprio, represente geometricamente e verifique o qual a relação entre $\arg(z)$, $\arg(z^2)$.
 9. Multiplique $3 + 2i$ por $3 - 2i$ e represente geometricamente estes vetores e o produto deles.
 10. Módulo de um número complexo

Uma das razões que tornam os números complexos um tipo de número a parte, é o seu envolvimento com a geometria. Como um número real, os números complexos tem módulo, mas neste caso o método de cálculo se deduz direto do Teorema de Pitágoras.

Definição 4 Módulo do número complexo $a + bi$.

$$|(a + bi)| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

11. Calcule o módulo de

$$u ; u \in \{3 + 2i, 2 + 3i, 3 - 2i, 2 - 3i\}$$

12. distância Observe que nos reais, $|a - b|$ é a distância, $d(a, b)$, entre os dois números a, b . Da mesma forma, entre dois números complexos u, v a distância entre eles vem do Teorema de Pitágoras e é o módulo da diferença $|u - v|$. Faça alguns exercícios para adquirir intuição: Encontre o lugar geométrico dos números complexos u tal que

$$\begin{array}{lll} a) |u| = 1 & b) |u| = 2 & c) |u - 3| = 1 \\ d) |u - 3| = 2 & e) |u - (2 + 3i)| = 1 & f) |u - (2 + 3i)| = 2 \\ g) |u| \leq 1 & h) |u| < 1 & i) |u| \leq 2 \\ j) |u - 3| < 1 & k) |u - (2 - 3i)| < 2 & l) |2u - (2 - 3i)| < 2 \end{array}$$

a solução do exercício anterior Pontos equidistantes de um ponto dado se encontram sobre uma circunferência. No caso das desigualdades vamos ter discos (com ou sem fronteira). Traduza as questões anteriores com a linguagem da equação de círculos, no plano \mathbf{R}^2 , **Notação:** $(C(a, b), r)$ é o círculo de centro no ponto (a, b) e raio r .

13. Potências de i

(a) Calcule as 10 primeiras potências de i e encontre uma lei formação que estas potências obedecem.

(b) Escolha abaixo qual é o resultado impossível para a soma

$$i^n - i^m ; n, m \in \mathbf{N}$$

$$\square \pm(1 + i) \quad \square \pm(1 - i) \quad \square 0 \quad \square i \quad \square 2i \quad \square -2i$$

14. Relações de Girard, caso complexo Mostre que as relações de Girard, também são válidas para raízes complexas isto é, quando $\Delta < 0$.

Para a equação $x^2 + bx + c = 0, a = 1$, temos

$$(a) S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -b$$

$$(b) P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = c$$

Assim, a equação $x^2 + bx + c = 0$, pode ser escrita da seguinte forma:

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

15. Encontre uma equação do segundo grau cujas raízes somem 6 e o produto seja 13.

1.2 Números complexos: extensão dos reais

Um número complexo é um par de números reais, portanto coincide, com o conjunto, com o \mathbf{R}^2 :

$$\mathbf{C} \equiv \mathbf{R}^2.$$

A diferença é que existe em \mathbf{C} uma multiplicação que estende a multiplicação dos números reais

Usaremos as duas notações para um número complexo

$$(a, b) \equiv a + bi$$

sem mais nos preocuparmos com observações a respeito.

Uma terminologia existe em torno dos números complexos que vamos relembrar. A figura (1.4) página 14, ilustra os fatos descritos na próxima definição.

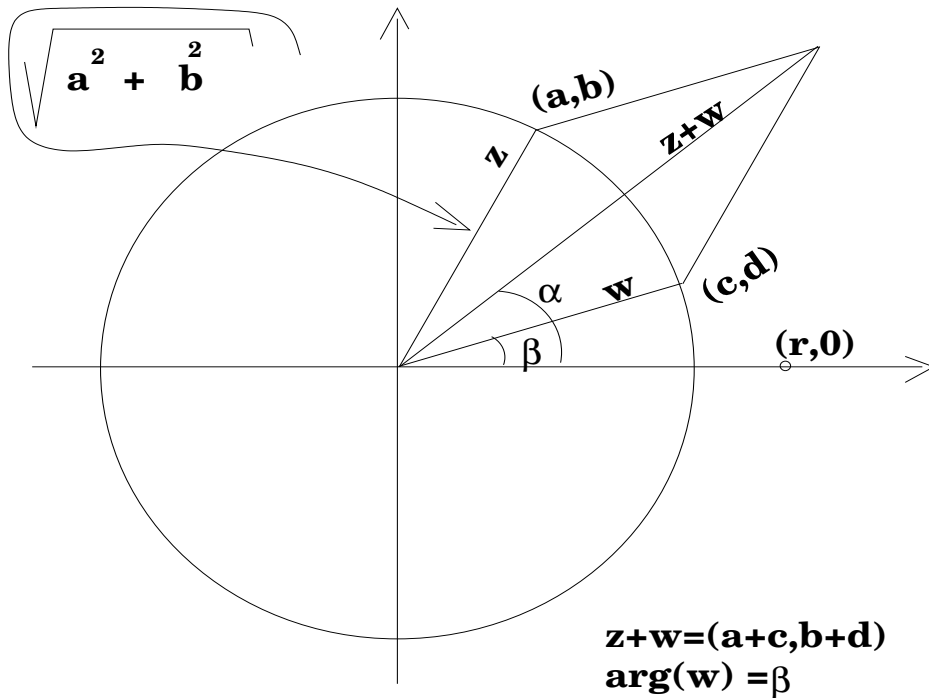


Figura 1.4: Propriedades dos números complexos

Definição 5 Parte real e imaginária

Dado um número complexo $z = (a, b)$ diremos

- parte real a é a parte real de z ; $a = \text{Re}(z)$
- parte imaginária b é a parte imaginária de z ; $b = \text{Im}(z)$

- módulo O número complexo $z = (a, b)$ determina com a origem $(0, 0)$ um segmento do plano que usamos para visualizar o número complexo z . O comprimento deste segmento é

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

o módulo de z .

- argumento de um número complexo é o ângulo que o segmento de reta que representa geometricamente o número complexo faz com o semi-eixo positivo dos números reais medido na direção anti-horária. Quer dizer que se um número complexo for real, o seu argumento pode ser zero quando for positivo, ou π quando for negativo.

Na figura (1.4) o argumento de w é β e o argumento de $z + w$ é α .

$$\arg(w) = \beta ; \arg(z + w) = \alpha$$

- Os números reais

1. O conjunto dos números reais positivos é o subconjunto de \mathbf{C} formado pelos números complexos cuja parte imaginária é zero, e argumento zero,

$$\mathbf{R}_+ = \{w = (x, 0) ; x \in \mathbf{R} ; \arg(w) = 0\}$$

é o semi-eixo positivo OX_+

2. O conjunto dos números reais negativos é o subconjunto de \mathbf{C} formado pelos números complexos cuja parte imaginária é zero e o argumento é π :

$$\mathbf{R}_- = \{w = (x, 0) ; x \in \mathbf{R} ; \arg(w) = \pi\}$$

é o semi-eixo negativo OX_-

Teorema 1 (Extensão da multiplicação dos reais)

A multiplicação de números complexos é uma extensão da multiplicação de números reais.

Dem:

Dados dois números complexos

$$z = (a_1, b_1) = a_1 + b_1i, \quad w = (a_2, b_2) = a_2 + b_2i$$

temos

$$zw = (a_1, b_1)(a_2, b_2) = \tag{1.20}$$

$$(a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1) = \tag{1.21}$$

$$a_1a_2 - b_1b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)i \tag{1.22}$$

Considere agora dois números reais: r_1, r_2 . Eles determinam os dois números complexos

$$z = (r_1, 0), \quad w = (r_2, 0).$$

Se os multiplicarmos vamos ter

$$z, w \in \mathbf{R} \quad (1.23)$$

$$zw = (r_1, 0)(r_2, 0) = \quad (1.24)$$

$$(r_1 r_2 - 0, 0) = \quad (1.25)$$

$$r_1 r_2 + 0i = r_1 r_2 = zw \in \mathbf{R} \quad (1.26)$$

$$(1.27)$$

Como $\Im(r_1 r_2, 0) = 0$ podemos dizer, com certo abuso de linguagem, que $(r_1 r_2, 0) \in \mathbf{R}$

Consequentemente o produto de dois números complexos que sejam reais resulta no produto dos números reais que eles representam. Assim dizemos que a multiplicação de números complexos é uma extensão da multiplicação dos números reais.

q.e.d.

Como $\mathbf{C} \equiv \mathbf{R}^2$ então o conjunto dos números complexos é um grupo abeliano com a adição de pares ordenados que já conhecemos.

Vamos agora resolver o exercício (ex. , 7), página 12. Adotaremos uma expressão mais geral: calcular o inverso de (a, b) .

Por definição, o número complexo (x, y) será o inverso multiplicativo de (a, b) , se, e somente se, o produto dos dois for o elemento neutro da multiplicação $(1, 0) = 1 + 0i$. Vamos forçar esta igualdade para determinar (x, y) :

$$(x, y)(a, b) = (ax - by, ay + bx) = (1, 0) \equiv \quad (1.28)$$

$$\equiv \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \quad (1.29)$$

$$\equiv \begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad (1.30)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases} ; \begin{cases} a^2 x - aby = a \\ b^2 x + aby = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad (1.31)$$

$$\Rightarrow (a^2 + b^2)y = -b ; (a^2 + b^2)x = a \Rightarrow \quad (1.32)$$

$$\Rightarrow y = \frac{-b}{a^2 + b^2} ; x = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad (1.33)$$

Se o número complexo $(a, b) \neq (0, 0)$ a solução encontrada é possível o que demonstra o teorema:

Teorema 2 *Inverso multiplicativo em \mathbf{C}*

Todo número complexo $(a, b) \neq (0, 0)$ tem um único inverso multiplicativo em \mathbf{C} que é da forma

$$\frac{1}{(a, b)} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) \quad (1.34)$$

Podemos simplificar a expressão do inverso se adotarmos uma notação que depois será muito útil:

Definição 6 *Conjugado de um número complexo*

Chamamos de conjugado de $z = (a, b)$ ao número complexo $\bar{z} = (a, -b)$

Veja na figura (1.5) o número complexo z , o seu conjugado, o seu inverso aditivo e sua projeção em \mathbf{S}^1 .

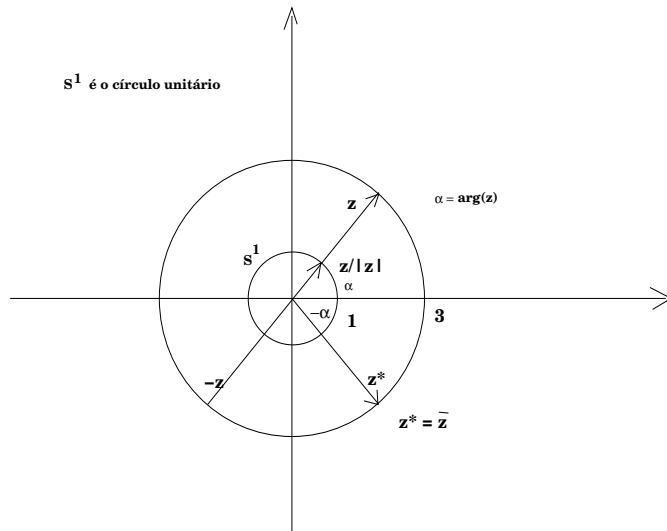


Figura 1.5: Conjugado de um número complexo

Em alguns textos o conjugado \bar{z} de z é designado por z^* . Vejamos agora que

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(a,b)} = \frac{1}{a^2+b^2}(a, -b) = \quad (1.35)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a^2+b^2}\bar{z} \quad (1.36)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|^2}\bar{z} \quad (1.37)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad (1.38)$$

e agora, atendendo a promessa de resolver o (ex. , 7) temos o inverso multiplicativo de $3 + 2i = (3, 2)$ é

$$z = (3, 2) \mapsto \bar{z} = (3, -2) \quad (1.39)$$

$$z = (3, 2) \mapsto |z|^2 = 3^2 + 2^2 = 13 \quad (1.40)$$

$$z = (3, 2) \mapsto \frac{1}{z} = \frac{1}{13}(3, -2) = \left(\frac{3}{13}, \frac{-2}{13}\right) \quad (1.41)$$

Podemos usar a última expressão da sequência de equações acima para mostrar um uso frequente do “conjugado”, veja a sequência

$$z = (a, b) ; \bar{z} = (a, -b) ; z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2 \quad (1.42)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} \quad (1.43)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad (1.44)$$

que mostra que podemos usar o conjugado para fazer surgir um número real no denominador, o que, muitas vezes, é útil.

O próximo teorema reúne as propriedades do conjugado:

Teorema 3 *Propriedades da conjugação*

Considere os números complexos u, v e o número real λ .

1. Linearidade

$$(a) \overline{u + v} = \bar{u} + \bar{v}$$

$$(b) \overline{\lambda u} = \lambda \bar{u}$$

2. reflexividade $\bar{\bar{u}} = u$

3. produto $\overline{uv} = \bar{u}\bar{v}$

4. divisão $\overline{\frac{u}{v}} = \frac{\bar{u}}{\bar{v}}$

5. reais Se $u = \bar{u}$ se e somente se $u \in \mathbf{R}$.

Laboratório 2 *Módulo, argumento, forma polar*

1. Resolva as equações

a) $4z = -5$	b) $(4 + 3i)z = -5$	c) $4z^2 + 2z = -1$	d) $z^2 = -1$
e) $(4 + 3i)z = -2i$	f) $\frac{z}{4+3i} = -50$	g) $z^2 = 1$	h) $z^2 + 2z = 1$
i) $\frac{z+5-3i}{3-2i} = 0$	j) $3z + i = 5z - 7$	k) $z^2 + 3z = -10$	l) $4z^2 = 1$

2. forma polar de um número complexo

(a) módulo

Calcule o módulo dos números complexos dados abaixo:

$$a) 2 + 3i \quad b) 2 - 3i \quad c) 0.4 + 0.2i \quad d) \frac{1+i}{2}$$

(b) argumento

Calcule a projeção dos números complexos abaixo, no círculo trigonométrico, \mathbf{S}^1 .

$$a) 2 + 3i \quad b) 2 - 3i \quad c) 0.4 + 0.2i \quad d) \frac{1+i}{2}$$

(c) módulo e argumento

Calcule a projeção de $a + bi$ sobre \mathbf{S}^1 determinando quando isto não for possível.

3. forma matricial I

Mostre que o produto dos números complexos $a+bi$ por $x+iy$, nesta ordem, equivale ao produto de matrizes

$$(a+bi)(x+iy) \equiv \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.45)$$

4. forma matricial II

Mostre que o produto dos números complexos $a+bi$ por $x+iy$, nesta ordem, equivale ao produto de matrizes

$$(a+bi)(x+iy) \equiv \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} \quad (1.46)$$

5. produto e rotação

(a) Considere dois pontos A, P sobre o círculo trigonométrico \mathbf{S}^1 ,

$$\mathbf{C} \supset \mathbf{S}^1 \ni A = \cos\theta + isen\theta \equiv (\cos\theta, sen\theta) \in \mathbf{R}^2 \quad (1.47)$$

$$\mathbf{C} \supset \mathbf{S}^1 \ni P = \cos\alpha + isen\alpha \equiv (\cos\alpha, sen\alpha) \in \mathbf{R}^2 \quad (1.48)$$

Identifique no produto AP a expressão do arco soma.

(b) Mostre que AP , nesta ordem, produz uma rotação de θ sobre o vetor \vec{P} no sentido horário (positivo).

(c) Como a multiplicação de números complexos é comutativa, procure a contradição, ou corrija o item anterior.

(d) Conclua do item anterior que

$$z, w \in \mathbf{S}^1 \Rightarrow zw \in S$$

ou seja, o círculo unitário é estável sob a multiplicação.

(e) O grupo dos complexos de módulo 1 Verifique que S , o conjunto dos números complexos de módulo 1, é um grupo comutativo com a multiplicação.

1.3 Módulo, argumento e conjugado

Vamos formalizar algumas experiências que foram feitas nas seções precedentes: parece que o produto de números complexos pode ser descrito de uma forma geométrica. Vamos ver que de fato é assim e deduzir as propriedades do produto, de forma bem simples, usando a representação geométrica.

1.4 Intepretação geométrica do produto

Há duas largas estradas correndo em paralelo: Os números complexos, um par de números reais da forma $a + bi$ e um *puro par de números reais* (a, b) .

São, em essência, duas coisas diferentes, com propriedades distintas mas também com muita coisa em comum. Por exemplo

- em \mathbf{C} tem um multiplicação
- em \mathbf{R}^2 não tem nenhuma multiplicação
- a adição em \mathbf{C} é exatamente a mesma adição de \mathbf{R}^2

A forma polar de um número complexo

Um dos exercícios de laboratório que lhe foram propostos pedia que você *projetasse* um número complexo $a + bi$ sobre o círculo unitário \mathbf{S}^1 .

Geometricamente, veja a figura (fig. 1.6), podemos obter esta projeção traçando a reta *determinada* pelo ponto $P = (a, b)$ e pelo centro de \mathbf{S}^1 , veja a figura (1.6).

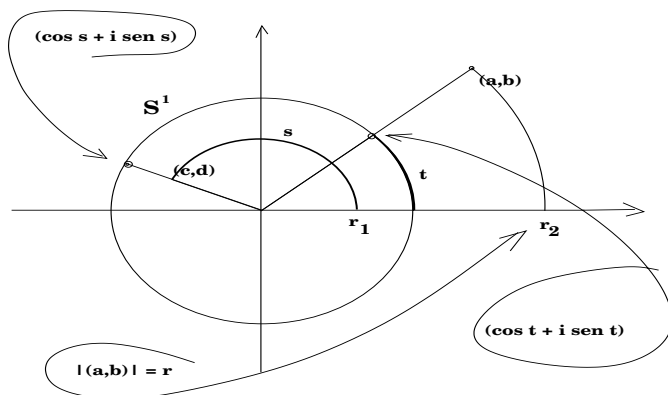


Figura 1.6: A projeção de $a + bi$ sobre \mathbf{S}^1 .

Algebricamente isto se faz dividindo (a, b) pelo seu módulo, resultando assim num vetor de módulo 1, portanto, sobre \mathbf{S}^1 . Usando a notação da (fig. 1.6),

temos

$$(cost, sent) = cost + isent = \frac{a + bi}{|(a + bi)|} = \frac{(a, b)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Estamos vendo assim a intimidade que existe entre os *números complexos* e a trigonometria. O importante neste momento é escrever o caminho de volta de $(cost, sent)$ para o número complexo (a, b) :

$$(a, b) = r(cost, sent) ; r = |(a, b)|. \quad (1.49)$$

com o que obtivemos a *forma polar* de (a, b) . Nela vemos representados os dois conceitos geométricos que formam um número complexo: *módulo* e *argumento*. Vamos re-escrever esta fórmula colocando em evidência estes dois conceitos:

$$z = (a, b) = |z|(cosarg(z), senarg(z)); \quad (1.50)$$

$$z = r(cost, sent); \quad (1.51)$$

$$|z| = r = |(a, b)| \quad (1.52)$$

Laboratório 3 Forma polar, trigonometria conjugação

1. Verifique as igualdades abaixo e faça uma representação geométrica das mesmas:

(a) Verifique que $2\text{Re}(z) = z + \bar{z} \in \mathbf{R}$

(b) Verifique que $2i\text{Im}(z) = z - \bar{z} \in i\mathbf{R}$

(c) Verifique que $z\bar{z} = |z|^2 \in \mathbf{R}$

2. Calcule $(a + bi)^2$

3. Fórmula de Moivre

- (a) forma polar Quando escrevemos um número complexo usando a fórmula de Moivre, dizemos que usamos a forma polar do número. Escreva os números

$$z_1 = 4 + 3i ; z_2 = 3 - 4i ; z_3 = -3 - 4i ; z_4 = 3 + 4i$$

na fórmula polar.

- (b) potência Calcule z^2 com $z = r(cos\theta, sen\theta)$.

- (c) potência Suponha que a expressão encontrada para z^2 também valha para z^n . Escreva esta expressão. Deduza a expressão de z^{n+1} .

Resposta Este exercício mostra, por indução finita a fórmula de Moivre

$$z = r(cos\theta, sen\theta) \Rightarrow z^n = r^n(cos(n\theta), sen(n\theta))$$

- (d) Use a fórmula de Moivre para expressar $cos(3\theta)$ em função de $cos(\theta)$, $sen(\theta)$.

Solução 1

$$\cos(3\theta) = \operatorname{Re}((\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta))^3) \quad (1.53)$$

$$(\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta))^3 = \quad (1.54)$$

$$= \cos(\theta)^3 + 3i\cos(\theta)^2\operatorname{sen}(\theta) - 3\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)^2 - i\operatorname{sen}(\theta)^3 \quad (1.55)$$

$$= \cos(\theta)^3 - 3\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)^2 + (3i\cos(\theta)^2\operatorname{sen}(\theta) - i\operatorname{sen}(\theta)^3) \quad (1.56)$$

$$\cos(3\theta) = \cos(\theta)^3 - 3\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)^2 \quad (1.57)$$

4. As raízes de um número complexo

(a) forma polar Use a fórmula de Moivre calcular $\sqrt[3]{z_i}$ com

$$z_1 = 4 + 3i ; z_2 = 3 - 4i ; z_3 = -3 - 4i ; z_4 = 3 + 4i$$

5. Ache todos os valores de $z \in \mathbf{C}$ tal que $z^2 + |z| = 0$.

6. Encontre todos os complexos z que satisfaçam à condição

$$|z - 25i| < 15$$

7. Qual o valor máximo do módulo do número complexo z se

$$\left|z + \frac{1}{z}\right| = 1$$

8. Resolva a equação $(1 - i)^x = 2^x$. **Solução:**

$$(1 - i)^x = 2^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |1 - i|^x = 2^x \Rightarrow (\sqrt{2})^x = 2^x$$

Mas a última igualdade somente é possível para $x = 0$.

9. Mostre que vale a fórmula do binômio de Newton

$$(z + w)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{(n-k)} ; z, w \in \mathbf{C}$$

10. Inteiros de Gauss

Definição 7 Inteiros de Gauss

Chamamos de Inteiros de Gauss ao conjunto $Z + iZ$ de todos os números complexos com parte real e parte imaginária inteiras.

(a) Anel dos inteiros de Gauss Verifique que o conjunto dos inteiros de Gauss com a adição e multiplicação dos complexos é um anel.

Solução

$(\mathbf{C}, +, \cdot)$ é um corpo, como $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ mas se fizermos a restrição de coordenadas inteiras para os números complexos deixa de existir o inverso multiplicativo, portanto em $Z + iZ$ não vale a propriedade da existência do inverso multiplicativo e assim $(Z + iZ, +, \cdot)$ é um anel, comutativo com unidade.

- (b) Prove que se z for um inteiro de Gauss então qualquer potência inteira de z também será um inteiro de Gauss.

Solução

Isto é consequência direta do Teorema do Binômio de Newton. Logo z^n é um inteiro de Gauss.

- (c) Prove que para todo número complexo e todo inteiro n vale

$$(|z|^n) = |z^n|$$

Solução:

Usando a fórmula de Abel-Euler temos

$$z = r(\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta)) ; z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\text{sen}(n\theta))$$
$$|z| = r ; |z^n| = r^n = |z|^n$$

Observe que n não precisa ser inteiro.

- (d) Verifique, em particular, que se z for um inteiro de Gauss, então $|z^2|^n \in \mathbf{Z}$.
- (e) Se $a, b, n \in \mathbf{Z}_+$, prove que existem inteiros x, y tais que

$$(a^2 + b^2)^n = x^2 + y^2$$

Solução:

O módulo de um inteiro de Gauss não será, em geral, um inteiro, mas o o quadrado do seu módulo será um número inteiro.

Considere $z = a + bi$ um inteiro de Gauss, construído com os inteiros a, b dados, e um número inteiro n também dado.

$$z = a + bi \in \mathbf{Z} + i\mathbf{Z}$$
$$z, z^n, (z^n)^2 \text{ são inteiros de Gauss}$$
$$\exists x, y \in \mathbf{Z}; z^n = x + iy \in \mathbf{Z} + i\mathbf{Z}$$
$$(|z|^n)^2 = (|z|^2)^n = (a^2 + b^2)^n$$
$$(|z^n|)^2 = |x + iy|^2 = x^2 + y^2$$
$$(a^2 + b^2)^n = x^2 + y^2$$

Os inteiros x, y são as partes reais e imaginárias de z^n quando $z = a + bi \in \mathbf{Z} + i\mathbf{Z}$. Por exemplo, considere $a, b, n = 2, 3, 4$ nesta ordem.

$$z = a + bi = 2 + 3i \implies z^4 = (2 + 3i)^4 = -(119 + 120i)$$
$$(a^2 + b^2)^n = 28561 = 119^2 + 120^2$$

os inteiros procurados x, y são 119, 120

11. Prove que se $z + \frac{1}{z} = 2\cos(\alpha)$ então

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos(n\alpha)$$

Solução:

$$\begin{aligned}
z + \frac{1}{z} &= 2\cos(\alpha) \in \mathbf{R} \implies \\
z \in \mathbf{S}^1 &\equiv z = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha) \\
z^n &= \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha) \\
\frac{1}{z^n} &= \cos(n\alpha) - i\sin(n\alpha) \\
z^n + \frac{1}{z^n} &= 2\cos(n\alpha)
\end{aligned}$$

1.4.1 Para melhorar a arte de fazer contas

Nenhum dos exercícios abaixo será utilizado em qualquer ponto deste livro, no futuro, você pode, tranquilamente, ignorá-los.

Exercícios 1 *Desafios...*

1. Escreva na forma polar $z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ e $w = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$

2. Sendo $f(z) = \frac{z^2+z+1}{z^4-1}$ calcular $f(2+3i)$.

3. Mostre que se

$$(z-p)(\bar{z}-\bar{p}) = p\bar{p}$$

então o ponto z descreve um círculo de centro no ponto p passando pela origem dos eixos.

4. Considere $w = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3})$. Mostre que se z_1, z_2, z_3 satisfizerem a relação

$$z_1 + wz_2\bar{w}z_3 = 0$$

então eles são, respectivamente, paralelos aos lados de um triângulo equilátero.

5. Um número complexo varia mas seu módulo fica compreendido entre 1 e

6. Calcule o módulo máximo¹ e o módulo mínimo da função

$$f(z) = z^2 + 3z.$$

6. Se $z = 2 + i(w - \frac{1}{w})$ calcule as partes reais e imaginárias de z em função das partes reais e imaginárias de w . Descreva o lugar geométrico do ponto w quando $z \in \mathbf{R}$.

7. Prove que se $|z| = 1$ então $\operatorname{Re}(\frac{1-z}{1+z}) = 0$

¹o maior e o menor valor do módulo de $f(z)$

Capítulo 2

Sistemas de equações lineares I

Um bom exemplo do que é uma matriz surge quando representamos a multiplicação complexa como uma transformação do plano:

$$u = (a, b) \equiv a + bi \quad (2.1)$$

$$z = x_1 + x_2 i \mapsto uz = (a + bi)(x_1 + x_2 i) = y_1 + y_2 i = w \quad (2.2)$$

$$\mathbf{C} \ni z = x_1 + x_2 i \Rightarrow y_1 + y_2 i = w \in \mathbf{C} \quad (2.3)$$

vista agora como

$$(x_1, x_2) \mapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (y_1, y_2) \quad (2.4)$$

$$\mathbf{R}^2 \ni (x_1, x_2) \mapsto (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2 \quad (2.5)$$

No primeiro caso, de \mathbf{C} em \mathbf{C} bastam-nos dois números $\overline{a, b}$ para caracterizar a operação. No segundo caso precisamos dos quatro números $\overline{a, -b, a, b}$ como coeficientes da transformação do plano no plano dispostos no formato retangular

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

A é a *matriz* dos coeficientes da transformação do plano representando o produto de números complexos.

Neste capítulo vamos trabalhar com as matrizes e as funções que ela *representam*, as *funções lineares*.

2.1 Matrizes

O ponto inicial vai ser a “tradução algébrica” de uma “questão geométrica”. Aliás, esta disciplina que recém começamos neste capítulo, se encontra no seio de quase todos os processos importantes de *codificação* (e naturalmente de *decodificação*) necessários às nossas comunicações ou a simples guarda de dados.

Neste momento esta afirmação poderá lhe parecer *pedante* uma vez que não

temos condições de nos explicar melhor¹ esta questão. Mas esperamos que até a metade do livro você já consiga ver claramente esta verdade e nós lhe pediremos que volte a refletir sobre ela, prometemos.

2.1.1 Um exemplo algébrico

Uma *conta* com números complexos,

$$(a + bi)(x + yi)$$

corresponde a um esquema de quatro números

$$a, b, x, y$$

que representa esta *conta* como uma transformação do *plano no plano*:

$$\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{C} \ni (x, y) \mapsto (a + bi)(x + yi) = (ax + by) + (ay + bx)i \in \mathbf{C} \quad (2.8)$$

Uma questão *geométrica* representada por um *cálculo algébrico*.

A multiplicação de um número complexo

$$z = x + yi$$

por outro

$$u = a + bi$$

pode ser vista como duas operações geométricas (lembre-se da fórmula de *Abel-Euler*)

$$\underline{u = a + bi}$$

- uma rotação $e^{i\theta}$
- uma homotetia $\rho \in \mathbf{R}^+$
- $u = \rho e^{i\theta}$

$$\underline{z = x + yi}$$

- uma rotação $e^{i\alpha}$
- uma homotetia $r \in \mathbf{R}^+$
- $z = r e^{i\alpha}$

¹e você poderia nos perguntar: e porque não falar depois ?

$$uz = (a + bi)(x + yi) = ax - by + (ay + bx)i = \begin{pmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{pmatrix} = \quad (2.9)$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

$$uz = \rho e^{i\theta}(x + yi) \quad (2.11)$$

$$uz = \rho(\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta))(x + yi) \quad (2.12)$$

$$\rho e^{i\theta} r e^{i\alpha} = (\rho r) e^{i(\theta+\alpha)} \quad (2.13)$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{pmatrix} = \quad (2.14)$$

$$\begin{pmatrix} \rho \cos(\theta) & -\rho \text{sen}(\theta) \\ \rho \text{sen}(\theta) & \rho \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \cos(\alpha) \\ r \text{sen}(\alpha) \end{pmatrix} = \quad (2.15)$$

$$\begin{pmatrix} \rho r (\cos(\theta)\cos(\alpha) - \text{sen}(\theta)\text{sen}(\alpha)) \\ \rho r (\cos(\theta)\text{sen}(\alpha) + \text{sen}(\theta)\cos(\alpha)) \end{pmatrix} = \quad (2.16)$$

$$\begin{pmatrix} \rho r \cos(\theta + \alpha) \\ \rho r \text{sen}(\theta + \alpha) \end{pmatrix} = (\rho r) e^{i(\theta+\alpha)} \quad (2.17)$$

Deixamos que você gaste algum tempo para analisar cada uma das passagens feitas no bloco de equações acima. Tivemos o cuidado de descrever todas as “traduções” possíveis, mas é preciso uma análise cuidadosa para fechar todas as questões que elas envolvem. Considere isto um exercício.

Veja que as equações (eq. 9) . . . (eq. 17) são um primeiro exemplo de *codificação-decodificação* que nos referimos no início do capítulo.

- Codificamos $z = (x, y)$ como $re^{i\alpha}$
- lhe aplicamos uma “portadora” $u = \rho e^{i\theta}$
- para obter uma imagem $uz = \rho r e^{i(\theta+\alpha)}$

e inclusive sabemos como reverter esta transformação para recuperar o “sinal” inicial.

Usamos, propositadamente, uma linguagem importada das “comunicações” porque em algum momento futuro pretendemos mostrar-lhe que esta é uma *aplicação* da Álgebra Linear.

As equações (eq. 9) . . . (eq. 17) mostram que podemos associar a um número complexo $u = a + bi$ uma *portadora* para transformar outros números complexos e que esta *portadora* define uma matriz de um tipo especial

$$u = a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

$$u = \rho e^{i\theta} \quad \rho = \sqrt{a^2 + b^2}; \theta = \text{atan}\left(\frac{b}{a}\right) \quad (2.19)$$

$$a = 0 \Rightarrow \rho = |b|; \theta = \frac{\pi}{2} \quad (2.20)$$

Não consideramos o caso $(a, b) = (0, 0)$ porque ele não representaria nenhuma “*comunicação*” interessante, anularia qualquer dado ao qual fosse aplicado.

Vamos usar esta notação na próxima lista de exercícios que lhe dá algumas dicas para entender a geometria contida nas equações (eq. 9) ... (eq. 17), usando `scilab` e `gnuplot`.

Exercícios 2 *Cálculos usando scilab*

1. Considere $a = 3, b = 2$ e defina a portadora correspondente ao número complexo $u = a + bi$ e calcule as imagens (transformações) de

$$v \in \{1; 1 + i; i; -1 + i; -1; -1 - i; -i; 1 - i; 2 + 3i\}$$

2. Faça os gráficos de `veuv` em alguns dos casos acima.
3. Calcule a forma polar dos vetores

$$v \in \{1; 1 + i; i; -1 + i; -1; -1 - i; -i; 1 - i; 2 + 3i\}$$

4. Calcule uv usando a forma polar (fórmula de Abel-Euler) para cada valor de v

Solução de alguns exercicios

1. Usando `scilab`, e omitindo as respostas.

```
-->a=3
-->b=2
-->A = [a,-b;b,a]
-->rho = sqrt(a**2 + b**2)
-->theta = atan(b/a)
-->v1 = [1;0]
-->A*v1
ans =
```

3.
2.

2. Usando `scilab` e fazendo gráficos com `gnuplot`

```
set xrange [-10:10]
set yrange [-10:10]
set polar
set title "vetores e suas transformadas por A = [2,3;-3,2] v1 = (1,0)"
a=1;b=0
c=3;d=2
set arrow from 0,0 to a,b
set arrow from 0,0 to c,d
plot sqrt(a*a + b*b), sqrt(c*c + d*d)
```

```

pause -1
unset arrow

set title "v = (1,1); Av = (1,5) "
a=1;b=1
c=1
d=5
set arrow from 0,0 to a,b
set arrow from 0,0 to c,d
plot sqrt(a*a + b*b), sqrt(c*c + d*d)
pause -2
unset arrow

set title "v = (0,1); Av = (-2,3) "
a=0;b=1
c=-2;d=3
set arrow from 0,0 to a,b
set arrow from 0,0 to c,d
plot sqrt(a*a + b*b), sqrt(c*c + d*d)
pause -2
unset arrow

set title "v = (-1 ,1); Av = (-5,1) "
a=-1;b=1
c=-5;d=1
set arrow from 0,0 to a,b
set arrow from 0,0 to c,d
plot sqrt(a*a + b*b), sqrt(c*c + d*d)
pause -2
unset arrow

set title "v = (-1 ,0); Av = (-3,-2) "
a=-1;b=0
c=-3;d=-2
set arrow from 0,0 to a,b
set arrow from 0,0 to c,d
plot sqrt(a*a + b*b), sqrt(c*c + d*d)
pause -2
unset arrow

set title "v = (-1 , -1); Av = (-1,-5) "
a=-1;b=-1
c=-1;d=-5
set arrow from 0,0 to a,b
set arrow from 0,0 to c,d

```

```

plot sqrt(a*a + b*b), sqrt(c*c + d*d)
pause -2
unset arrow

set title "v = (0 ,-1); Av = (2,-3) "
a=0;b=-1
c=2;d=-3
set arrow from 0,0 to a,b
set arrow from 0,0 to c,d
plot sqrt(a*a + b*b), sqrt(c*c + d*d)
pause -2
unset arrow

set title "v = (1 ,-1); Av = (5,-1) "
a=1;b=-1
c=5;d=-1
set arrow from 0,0 to a,b
set arrow from 0,0 to c,d
plot sqrt(a*a + b*b), sqrt(c*c + d*d)
pause -2
unset arrow

set title "v = (2 ,1); Av = (4,7) "
a=2;b=1
c=4;d=7
set arrow from 0,0 to a,b
set arrow from 0,0 to c,d
plot sqrt(a*a + b*b), sqrt(c*c + d*d)
pause -2

```

se esta sucessão de comandos estiver no arquivo “vetores.gnuplot” você pode ver o resultado digitando

```
gnuplot vetores.gnuplot
```

e cada vez que acionar **enter**, com o cursor na shell onde você chamou **gnuplot**, um novo par v , Av será apresentado.

Justificando os comandos do **gnuplot**² usados acima:

- **set xrange**, **yrange** para estabelecer o domínio retângular da tela. Em geral é desnecessário, **gnuplot** calcula o tamanho da tela em função dos objetos gráficos chamados por **plot**;
- **set polar** liga o modo de coordenadas polares;
- **set title** para colocar um título na janela gráfica;

²ver [3]

- `a=3;b=5` dá valores para as variáveis;
- `set arrow from a,b to c,d` desenha uma segmento de reta do ponto (a, b) até o ponto (c, d) ;
É este o efeito do `pause -2` em `gnuplot`, aguarda `enter`. O comando `plot sqrt(a*a + b*b), sqrt(c*c + d*d)` (quando acionado o modo `polar`), desenha um círculo com raio variável no presente caso o raio é constante, e faz o comando `arrow` que estiver na memória do `gnuplot`, e o comando `unset arrow` limpa a memória.

3. A forma polar do número complexo $v = (x, y)$ é

$$\rho e^{i\theta} ; \rho = \sqrt{x^2 + y^2} ; \theta = \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right)$$

quando a função `atan` estiver definida. Quando um número complexo for imaginário puro, e diferente de zero, a função $\operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right)$ não está definida e definimos o argumento deste número complexo como sendo $\frac{\pi}{2}$.

2.1.2 Significado geométrico da multiplicação

No estudo dos números complexos se conclue que estes números podem ser escritos com a fórmula de Abel-Euler

$$u = a + bi \quad (2.21)$$

$$u = \rho e^{i\alpha} \quad (2.22)$$

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} ; \alpha = \operatorname{acos}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) \alpha = \operatorname{atan}\left(\frac{b}{a}\right) \quad (2.23)$$

sempre que

$$|u| = \sqrt{a^2 + b^2} \neq 0.$$

Se $|u| = \sqrt{a^2 + b^2} = 0$ por definição consideraremos

$$0 = 0e^{i0}.$$

Nas contas que fizemos na seqüência de equações (eq. 2.9) ... (eq. 2.17) estamos mostrando que na multiplicação o ângulo θ é o "índice" de rotação e o módulo $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ é o "fator" de homotetia.

Observação 1 *O argumento nulo* Entre os mitos e preconceitos mais comuns envolvendo a Matemática, se encontra um que diz que a Matemática é perfeita, sem erros, absolutamente lógica.

Além de ser mito, porque afinal a Matemática é um produto de seres humanos, e consequentemente sujeita às falhas dos seus criadores, este preconceito é o responsável pela grande dificuldade que as pessoas tem em aprender Matemática, porque elas se defrontam com os erros, com as incongruências, que povoam a disciplina, e projetam em si mesmas a dificuldade pensando que elas é que tem um raciocínio deficiente que as impede de compreender a disciplina.

Um vetor de argumento zero é um desses exemplos de buraco lógico. Qual seria o argumento do vetor zero?

É uma pergunta sem resposta.

Algumas vezes se diz que qualquer argumento serve, o que torna pior a situação. A resposta melhor seria que o vetor zero não tem argumento.

Mas observe,

$$0e^{i\theta} = 0 = 0e^{i(\theta+0)}$$

sugerindo que 0 se encontra na direção de $e^{i\theta}$ e por isto se diz que o vetor 0 tem qualquer argumento, ou tem qualquer direção. Como as retas representam as direções, e em qualquer reta podemos representar os números reais, esta alternativa é que adotada.

Esta caracterizada a dubiedade da Matemática... o que não reduz em nada a sua importância, porque, conquanto dúbia, funciona com perfeição e serve para colocar satélites em órbita quando os programadores não cometerem³ erros de cálculos...

2.1.3 As matrizes

Dos exercícios feitos acima, com números complexos, nos interessa o esquema

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

que chamamos *matriz*, e as propriedades que tais esquemas possam ter de forma independente.

Vamos estudar as matrizes e este estudo vai ter duas componentes distintas que posteriormente uniremos numa só teoria:

1. as propriedades de uma matriz como função de \mathbf{R}^2 em \mathbf{R}^2 ;
2. as propriedades do conjunto de todas as matrizes do tipo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Observe que o nosso exemplo inicial produziu uma matriz de um tipo muito especial

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

que representa um número complexo. Interessam-nos as matrizes que tenham entradas distintas, em geral, mas veremos que casos particulares, como este, serão importantes dentro da teoria.

2.1.4 O contôrnio inicial da teoria

Iremos posteriormente generalizar os limites estreitos em que estamos colocando o problema para trabalhar com espaços mais gerais, mas o leitor verá que o trabalho posterior, será, em muitos casos, uma simples ampliação do que estudarmos neste capítulo. Em alguns casos, entretanto, esta generalização produzirá efeitos espetaculares e inesperados.

³referência ao satélite francês que caiu com um minuto de vôo

2.1.5 Matrizes, a notação

As matrizes são esquemas retangulares de números

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

Neste exemplo usamos tres letras, a, b, c para representar cada uma das *linhas* da matriz A . Se a matriz tiver muitas linhas isto ficaria complicado, e sobretudo ficaria difícil para automatizar o processo de representação de matrizes.

Estaremos sempre pensando, neste livro, em processos automáticos em que programas de computador devem representar uma ferramenta essencial para agilizar os cálculos.

Por esta razão complicaremos um pouquinho mais a notação para poder atingir um melhor nível de formalização que será imprescindível quando precisarmos escrever programas de computação com matrizes ou formalizar demonstrações em que uma lista de letras seria um complicador. Em vez de usarmos tres letras, como acima, representaremos todas as linhas com uma única letra indexada:

$$a_1 := a ; a_2 := b ; a_3 := c$$

ficando a matriz agora escrita assim:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Estamos usando um sistema de índices duplos em que o primeiro índice se refere à linha e o segundo se refere à coluna. Este sistema de indexação é designado por “*lico*” quando for necessário indicar qual é a ordem de uso dos índices. Quando nada for dito a este respeito se considera que o método é o “*lico*”.

As matrizes de que vamos tratar neste capítulo são de duas linhas e duas colunas

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

e obviamente também trataremos de matrizes com uma linha e duas colunas ou matrizes com duas linhas e uma coluna. Em geral daremos o nome de *vetores* a estas matrizes em que o número de linhas ou de colunas é 1 por uma razão que aos poucos ficará aparente.

2.1.6 A parte computacional da álgebra

Da mesma forma como o simples trabalho operatório com os números pode ser agilizado com auxílio de máquinas de calcular, também as contas com as matrizes podem ser feitas de forma menos penosa com a ajuda de programas de computador. Faremos uso destes programas aqui.

Há diversos pacotes computacionais que podemos usar. Entre os muitos que existem, há pacotes de qualidade muito boa em *domínio público* aos quais daremos evidência. Dois deles serão indicados aqui, mas sugerimos que o leitor adote apenas um deles:

- gnu_octave em geral designado apenas por *octave*, é um pacote computacional basicamente construído por professores da Universidade Wisconsin, USA, e distribuído sob o GPL;
- scilab é um pacote produzido por uma das unidades do INRIA, um instituto francês de pesquisa e também distribuído sob o GPL.

Ambos, *octave* ou *scilab*, usam uma estrutura de dados também usada por pacotes comerciais e são, em muitos aspectos, semelhantes. Use o que estiver ao seu alcance. Quando dissermos, “*usando scilab podemos definir...*” em geral você poderá substituir por “*usando octave podemos definir...*” sem maiores problemas. Em Linux, para usar *octave* ou *scilab* basta digitar o nome do pacote numa ⁴*área de trabalho*, ou, como em qualquer outro *sistema operacional*, clicando com o *rato* em um menu adequado, no nome de um destes programas. Em Linux você deve procurar, no sistema de menus, o item *matemática*, possivelmente em inglês, *mathematics*, onde deve encontrar um desses programas. Não encontrando, peça a alguém que instale um deles no computador em que você trabalha, se você não souber ou não puder fazê-lo.

Para simplificar a questão, adotaremos *scilab* oficiosamente no texto e possivelmente apenas citaremos este pacote, sem com isto indicar qualquer menosprezo por *octave*.

Veja, por exemplo, o que produzimos na tela do computador, e tente repetir você mesmo, enquanto lê. Os números que aparecem antes de cada cálculo foram acrescentados por nós para facilitar os comentários que faremos em seguida. *scilab* não numera as linhas.

```
>$ scilab
```

```
=====
scilab-2.7
Copyright (C) 1989-2003 INRIA/ENPC
=====
```

```
Startup execution:
```

```
loading initial environment
```

```
1)-->a = [1,2,3;-1,-2,0;3,-1,4]
```

```
a =
```

⁴é quase certo que você encontra um ícone, ”tipo uma *televisão*”, na barra de ferramentas do sistema, clique neste ícone e, na tela que surgir, digite *scilab*, <enter>

```
! 1. 2. 3. !
! - 1. - 2. 0. !
! 3. - 1. 4. !
```

```
2)-->a(2,3)
```

```
ans =
0.
```

```
3)-->a(3,2)
```

```
ans =
- 1.
```

```
4)-->ans + 4
```

```
ans =
3.
```

```
5)-->a(3,2)
```

```
ans =
- 1.
```

```
6)-->ans = ans + 6
```

```
ans =
5.
```

```
7)-->a(3,1) + 4
```

```
ans =
7.
```

Os comentários

A linha

```
1)--> a = [1,2,3;-1,-2,0;3,-1,4]
```

foi executada dentro do *scilab* para definir uma matriz com tres linhas e tres colunas. Cada linha fica separada por “ponto e virgula” e dentro das linhas os elementos são separados por “vírgula” e *scilab* apresenta a matriz como um esquema retângular.

Observe *scilab* não numera as linhas, nós editamos o resultado para facilitar a nossa conversa com você, e continuaremos fazendo isto, de forma consistente, no futuro, mas sem chamar sua atenção, porque ao rodar *scilab* você verá a diferença.

As linhas seguintes do *scilab* exemplificam o uso dos índices.

A linha “3)-->” responde que $a_{32} = -1$.

Observe que temos que aprender a nos comunicar com um programa de computador. Em Matemática escrevemos

$$a_{32} = -1$$

dentro do programa de computador, no caso o *scilab*, escrevemos

$$a(3,2)$$

o que produziu a resposta do programa na linha seguinte

$$ans = -1.$$

“*ans*” é uma variável criada pelo programa para guardar a resposta⁵. *scilab* nos permite fazer contas com *ans* como você pode ver nas linhas seguintes.

Este exemplo deve justificar porque precisamos da notação formal a_{ij} que *scilab* entende como $a(i, j)$. Com ela podemos fazer referência aos elementos de uma matriz. Observe que o resultado da linha “7) -->”, nela, em vez de usar a variável *ans* usamos diretamente o “endereço” da entrada da matriz, $a(3, 1)$ para fazer uma nova operação. É um outro caminho válido.

O pacote *sabe* fazer contas com matrizes e podemos fazer um cálculo lembrando os números complexos.

```
1)--> A = [2,-3;3,2]
```

```
A =
```

```
 2  -3
 3   2
```

```
2)--> z = [1,2]
```

```
z =
```

```
 1  2
```

```
3)--> A*z'
```

```
ans =
```

```
 -4
  7
```

```
4)--> (A*z')'
```

```
ans =
```

```
 -4   7
```

```
5)-->
```

Depois de terminar qualquer cálculo, *scilab* se dispõe, gentilmente para fazer mais cálculos com o indicativo

```
-->
```

⁵da palavra inglesa *answer* que significa *resposta*

Ensinando scilab a operar com números complexos

scilab sabe fazer contas com matrizes, e nós usamos sua capacidade de operar com matrizes para multiplicar os números complexos

$$(2 + 3i)(1 + 2i) = 2 - 6 + (4 + 3)i = -4 + 7i.$$

veja a (eq 2.10) em que mostramos a identidade

$$(a + bi) \equiv \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

na qual o número complexo $(a + bi)$ fica representado pela matriz

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

2.1.7 A multiplicação de matrizes não é comutativa

Na linha (3), da sessão de cálculos com scilab, escrevemos

$$A * z'$$

e precisamos explicar o que fizemos. Não podíamos “multiplicar” a matriz

$$A$$

pelo vetor $z = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$. O produto de matrizes tem regras de “dimensão”. Uma matriz de duas linhas e duas colunas, dizemos 2×2 , lemos “dois por dois”, pode ser multiplicada à direita por uma matriz 2×1 . Ela pode ser multiplicada a à esquerda por uma matriz 1×2 ,

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

mas não é possível multiplicar

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

Experimente fazer a conta errada para ver que não funciona:

$$A * z ; z = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}.$$

O método da multiplicação combina cada elemento das linhas da matriz à esquerda, com os elementos das colunas da matriz à direita. Assim podemos multiplicar

$$u = (x_1, x_2) \quad (2.32)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} \equiv \quad (2.33)$$

$$\equiv A * u' \quad (2.34)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1a_{11} + x_2a_{21} \\ x_1a_{12} + x_2a_{22} \end{pmatrix} \equiv \quad (2.35)$$

$$\equiv u * A \quad (2.36)$$

e observe que o resultado das duas operações é diferente. Mas não é este exemplo que caracteriza que o produto de matrizes não é comutativo, porque $u \neq u'$. Se você não tiver experimentado fazer a conta *impossível* com `scilab`, faça-o agora para ver os comentários do programa.

Laboratório 4 Produto de matrizes

1. Descreva, com palavras, quando é que a matriz A pode ser multiplicada pela matriz B .
2. Descreva, com suas palavras, porque as multiplicações abaixo não podem ser efetuadas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3; 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Indique qual é a operação que pode ser feita, com cada um dos vetores, na questão anterior.
4. Descreva, usando as palavras linha, coluna os produtos

$$AB ; BA$$

5. Verifique que a função

$$z \mapsto iz$$

produz uma rotação no vetor $z \in \mathbf{C}$. Determine o ângulo desta rotação, e a matriz que a produz, quando aplicada ao vetor

$$z = \begin{pmatrix} x; y \end{pmatrix}$$

6. Encontre a matriz de rotação da função

$$\begin{pmatrix} x; y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x; -y \end{pmatrix}$$

2.1.8 Matriz transposta

Mas ainda falta justificar uma notação que tivemos de usar no `scilab`⁶. Observe que uma das equações foi escrita com a notação

$$A * u'$$

enquanto que a outra foi escrita assim

$$u * A.$$

Os dois vetores u' e u são diferentes. Um tem duas linhas e o outro tem duas colunas. O vetor u' se chama de **transposto** do vetor u . São dois vetores diferentes como as operações que fizemos acima o indicam, apesar de terem propriedades comuns. A **transposição** é uma operação muito usada na álgebra das matrizes e se define pela troca dos índices:

Definição 8 Matriz transposta

Considere a matriz $A = (a_{ij})_{ij}$. Sua transposta é a matriz $A' = (a_{ji})_{ij}$ obtida pela troca de todas as linhas em colunas.

Quando escrevemos manualmente, muitas vezes usamos a notação A^t para indicar a transposta da matriz A . As linguagens de programação usam A' em vez de A^t .

Voltando a última sessão de contas que fizemos com `scilab`, veja que podemos pedir que o programa responda com um vetor (tem gente que fala *matriz linha*), fizemos isto na linha 4) — $\rightarrow (A * z)'$, veja o resultado.

Observação 2 Matrizes linha ou coluna

Existe uma notação que iremos evitar neste livro, *matriz-linha* e *matriz-coluna*, as matrizes que tiverem apenas uma linha ou uma coluna.

Chamaremos as matrizes-linha de vetores e faremos o mesmo com as matrizes coluna, a não ser que precisemos distinguir umas das outras.

A transposição é a operação que associa uma matriz com outra que tem linhas e colunas intercambiadas, a notação é

$$A^t \text{ ou } A'$$

é a transposta de A . A transposta de um vetor é uma matriz-coluna.

Laboratório 5 Matrizes e números complexos

1. Encontre a matriz que representa a função

$$\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$$

para cada uma das equações definidas de $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$:

a) $z \mapsto iz$	b) $z \mapsto -iz$	c) $z \mapsto (1+i)z$	d) $z \mapsto (1-i)z$
e) $z \mapsto 2z$	f) $z \mapsto 3z$	g) $z \mapsto 0.5z$	h) $z \mapsto \frac{i}{2}z$

⁶ou no `octave`...

2. Encontre a matriz que produz uma rotação de $\frac{\pi}{4}$ nos vetores do plano. Sugestão, procure o número complexo que efetua esta operação geométrica.
3. Encontre a matriz que produz uma rotação de $\frac{3\pi}{4}$, e uma homotetia de módulo 2 nos vetores do plano Sugestão, procure o número complexo que efetua esta operação geométrica.
4. Multipliação não comutativa

(a) Use `scilab` para multiplicar as duas matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

Há duas maneiras de multiplicá-las,

$$A * B, B * A$$

uma delas inválida, e `scilab` lhe irá dizer, experimente.

(b) Use `scilab` para multiplicar as duas matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

Há duas maneiras de multiplicá-las,

$$A * B, B * A$$

todas duas válidas, mas o resultado é diferente em cada caso, experimente.

5. Tente justificar porque, em um dos casos acima, a multiplicação é inválida e no outro, todas duas multiplicações são válidas.
6. Defina em `scilab` uma matriz $A, 4 \times 3$ e uma matriz $B, 3 \times 4$ e efetue as contas

$$A * B ; B * A.$$

7. Qual é a dimensão de $A * B$.
8. Qual é a dimensão de $B * A$.
9. Definidas duas matrizes $A, n \times m$ e $B, m \times q$ indique a alternativa correta abaixo:
 - (a) Qualquer dos produtos $A * B; B * A$ pode ser efetuado;
 - (b) Apenas o produto $A * B$ pode ser efetuado e a matriz resultante tem dimensão $m \times q$.

(c) Apenas o produto $A * B$ pode ser efetuado e a matriz resultante tem dimensão $n \times q$.

(d) Apenas o produto $B * A$ pode ser efetuado e a matriz resultante tem dimensão $q \times q$.

Resposta: A alternativa correta é (c).

10. Fazendo contas com scilab

(a) Escreva o sistema de equações

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = -9 \\ 9y + 7z = 0 \\ 3x - y - z = -1 \end{cases} \quad (2.39)$$

como um produto de matrizes.

(b) Teste se o vetor $\begin{pmatrix} 1.4444 \\ -18.66666 \\ 24 \end{pmatrix}$ é solução do sistema de equações.

Solução

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & z \\ 0 & 9 & 7 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

-->A

A =

```
! 3.    2.    1. !
! 0.    9.    7. !
! 3.   -1.   -1. !
```

ans =

```
! 1.4444444 !
! -18.666667 ! = (x,y,z)
! 24.        !
```

-->A*ans

ans =

```
! -9.        !
! -1.066E-14 !
! -1.        !
```

Observe o resultado do último experimento no laboratório, em que `scilab` encontra o vetor

$$(-9., -1.066E - 14, -1.)$$

quando “nos esperavamos” que ele encontrasse

$$(-9, 0, -1).$$

`scilab` é um programa de computador e tem limitações. Os números racionais são objetos de “natureza infinita” que apenas a mente humana consegue dar-lhes, algumas vezes, uma roupagem finita. Nós, os humanos, conseguimos escrever 0 onde `scilab` somente consegue escrever $1.066E - 14$, na verdade, internamente, na máquina, é

$$0.0000000000000001066 = 1066 * 10^{-17} = 1.066 * 10^{-14}$$

2.2 Matrizes como funções do \mathbf{R}^2

Já vimos que as matrizes representam operações geométricas no plano. Vamos estudar as propriedades destas operações.

2.2.1 As matrizes 2×2

Como algumas matrizes 2×2 representam a multiplicação dos números complexos, vemos que elas generalizam a multiplicação dos números para os vetores.

É uma classe de matrizes, apenas, que representam os números complexos, as matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

Aqui vamos nos libertar desta restrição e considerar *todas as matrizes 2×2* e, conseqüentemente, vamos perder a companhia *exclusiva* dos números complexos, ampliando o conjunto de matrizes com que iremos trabalhar.

Dissemos que as matrizes generalizam a multiplicação. Isto quer dizer: dada uma matriz \mathcal{A}

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

podemos com ela multiplicar qualquer vetor do \mathbf{R}^2 à direita ou à esquerda (com resultados diferentes).

De início esta maneira de falar tem aspectos estranhos: estamos “multiplicando” elementos de tipos diferentes coisa que a Matemática não ensina. É assim, ao abrir caminhos novos temos que romper com as estruturas estabelecidas, mas veremos, depois do terremoto, que as coisas voltarão a se encaixar. Quando discutirmos, de forma mais ampla, as matrizes, teremos regras apropriadas para a “multiplicação de matrizes”.

2.2.2 Matrizes generalizam a multiplicação

Vamos usar a multiplicação matricial para *generalizar* a função real de variável real

$$\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} ; x \mapsto ax$$

Se escrevermos a definição acima, num programa, ele possivelmente emitirá uma mensagem de erro, porque não definimos a.

Experimente com *scilab*

```
scilab:1> function y = f(x)
> y = a*x
> endfunction
scilab:2> f(3)
```

que irá resultar numa mensagem de erro dizendo que a operação na linha 2 não é possível (porque a não está definido). Experimente agora

```
-->function y = f(x)
-->a=3
-->y = a*x
-->endfunction
Warning :redefining function: f
-->f(2)
ans =
    6.

-->f(5)
ans =
    15.
```

O que mudou?

A diferença agora é que demos um valor para a=3 e *scilab* sabe usar a função *f* corretamente.

Com este exemplo fizemos duas coisas:

1. lhe mostramos como definir funções no *scilab*;
2. definimos a função $x \mapsto ax ; a = 3$

Usaremos a mesma expressão, com algumas modificações, e uma interpretação distinta:

$$\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2 ; (x, y) \mapsto A(x, y)'$$

e vamos definir esta função também no *scilab* até mesmo porque as contas agora serão muito mais complicadas para que as façamos manualmente.

```
-->function u = f(x,y)
```



```
--> A = [2,-3;3,2]
-->u = A*[x;y]
-->endfunction
```

```
-->u = f(2,3)
u =
```

```
! - 5. !
! 12. !
```

Observe, *en passant*, que $f(2,3)$, casualmente, é o quadrado do número complexo $2+3i$ porque a matriz $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ representa este número complexo. Veja os resultados seguintes que são nossos conhecidos de outras conversas sobre números complexos

```
-->f(1,0)
ans =
```

```
! 2. !
! 3. !
```

porque $(1,0) = 1 + 0i$ é a unidade e assim $f(1,0)$ reproduz o número complexo $2 + 3i$, representado pela matriz A .

```
-->f(0,1)
ans =
```

```
! - 3. !
! 2. !
```

é uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ de $2 + 3i$ porque $(0,1) = i$ e o número complexo i provoca uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ em qualquer número multiplicado por ele. Veja na figura (fig. 2.1) página 45,

A próxima lista de exercícios é um laboratório em que vamos praticar os conceitos e programas apresentados. Desta prática tiraremos alguns aspectos teóricos em seguida.

Laboratório 6 *Matrizes e rotações*

1. Rotação de $\frac{\pi}{2}$

- (a) Abel-Euler Use a fórmula de Abel-Euler para descobrir qual é a matriz A que produz uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ em todo vetor (x, y) multiplicado por ela. Defina a função linear $f(x, y) = \mathcal{A}(x, y)^t$ que faz esta rotação.

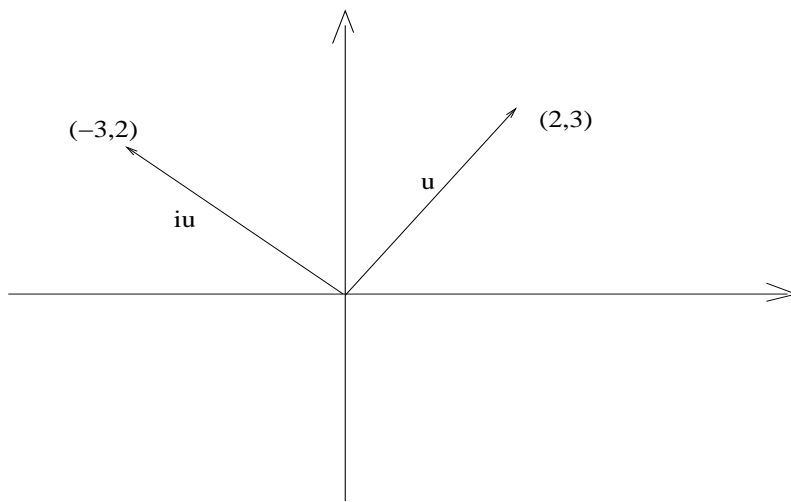


Figura 2.1: Multiplicação por i provoca uma rotação de $\frac{\pi}{2}$

(b) Prove, usando semelhança de triângulos, que

$$f(x, y) \perp (x, y)$$

em que f é a função definida no item anterior.

(c) Escreva a definição computacional de f em scilab e faça alguns experimentos, escolha alguns valores para (x, y) e calcule $f(x, y)$.

2. Abel-Euler Use a fórmula de Abel-Euler para descobrir qual é a matriz A que produz uma rotação de θ em todo vetor (x, y) multiplicado por ela. Defina a função linear $f(x, y) = A(x, y)^t$ que faz esta rotação.
3. Abel-Euler Use a fórmula de Abel-Euler para encontrar a matriz que produza uma rotação de ângulo θ e uma deformação (homotetia) de 3 unidades no vetor $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Defina a função linear f que executa este processo sobre qualquer em qualquer vetor (x, y) em que seja aplicada.
4. Rotações com scilab Agora que você sabe qual é a matriz que produz rotações no plano, escreva uma função em scilab para fazer rotações de ângulo θ . Mas observe, se scilab não souber quem é θ vai reclamar...
5. distributividade do produto relativamente à adição Considere os vetores

$$u = (m, n) , v = (p, q), u + v = (m + p, n + q)$$

Prove que $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ multiplicada por

$$u + v = (m + p, n + q)$$

se distribue, relativamente a adição:

$$\mathcal{A}(u + v) = \mathcal{A}u + \mathcal{A}v$$

6. Propriedades da multiplicação por um escalar Considere

$$u = (m, n) \in \mathbf{R}^2, \lambda \in \mathbf{R}, \lambda u = (\lambda m, \lambda n) \in \mathbf{R}^2$$

e uma matriz $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

(a) associatividade com produto por escalares

Prove que para uma matriz \mathcal{A} vale a associatividade na multiplicação por escalares:

$$\mathcal{A}(\lambda u) = (\mathcal{A}\lambda)u$$

(b) comutatividade Prove que

$$(\mathcal{A}\lambda) = (\lambda\mathcal{A})$$

(c) Prove finalmente que

$$\mathcal{A}(\lambda u) = \lambda(\mathcal{A}u)$$

7. Linearidade

Use os passos anteriores para mostrar que dada uma matriz \mathcal{A} qualquer é verdade que

$$\mathcal{A}(\lambda u + \gamma v) = \lambda\mathcal{A}u + \gamma\mathcal{A}v, \gamma \in \mathbf{R}; u, v \in \mathbf{R}^2$$

Expressões como

$$\lambda u + \gamma v$$

aparecem com grande frequência em muitas situações e por isso recebem um nome:

Definição 9 *Combinações lineares*

Dados dois vetores u, v e dois escalares λ, γ podemos calcular jm novo vetor

$$\lambda u + \gamma v.$$

A expressão $\lambda u + \gamma v$ se chama combinação linear dos vetores u, v com os escalares λ, γ .

Usando esta linguagem, demonstramos, nos exercícios acima que

Teorema 4 *Função linear* Uma função linear transforma combinações lineares em combinações lineares respeitando os coeficientes escalares.

Observação 3 *Combinações lineares*

- Média aritmética Um exemplo comum de combinação linear é uma média aritmética ponderada. Neste caso os escalares se chamam pesos e tem uma propriedade extra:

$$\lambda + \gamma = 1 ; \lambda, \gamma \geq 0$$

- Combinação linear convexa

As médias aritméticas ponderadas também se chamam combinações lineares convexas porque o vetor $\lambda u + \gamma v$ se encontra sobre o segmento de reta determinado pelos vetores u, v .

- Função linear nula ...os casos degenerados

Precisamos ter largueza de espirito, veja que a matriz nula $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ define uma função linear também, entretanto o seguimento de reta em que ela vai transformar qualquer outro segmento de reta, colapsa para um ponto... Se não considerarmos "pontos" como segmentos de reta (e podemos anexar o adjetivo "degenerados" para apaziguar os nossos preconceitos), perderíamos toda a teoria. Há várias situações em Matemática em que temos que admitir extensões de conceitos para que as coisas terminem funcionando, por exemplo o fatorial de zero, $0! = 1$ a definição $a^0 = 1$. Sem estes acréscimos na teoria, a teoria geral deixaria de funcionar.

Um corolário simples do teorema anterior é

Teorema 5 *Função linear e convexidade*

Uma função linear transforma um segmento de reta n'outro segmento de reta. **Dem**:

Como funções lineares transformam combinações lineares em combinações lineares respeitando os coeficientes escalares, então transformam médias aritméticas em médias aritméticas. Como os pontos de um segmento de reta são as médias aritméticas (ponderadas) dos extremos, então a imagem de um segmento de reta, por uma função linear, de qualquer ponto de um segmento de reta, será a média (com os mesmos pesos) das imagens dos extremos, logo um segmento de reta.

É preciso agora provar que todo ponto do segmento de reta imagem vem de algum ponto do segmento de reta pré-imagem. O raciocínio acima se aplica reversamente, uma vez que todo ponto do segmento de reta imagem é média aritmética ponderado das imagens dos extremos e aos pesos que o geraram corresponde um ponto do segmento de reta pré-imagem, e eles estão em correspondência pelo teorema anterior.

q.e.d .

Este teorema nos oferece um meio, um algoritmo, para encontrar a imagem de um segmento de reta:

Teorema 6 *Imagem de um segmento de reta*

Se f for uma função linear, então para determinar a imagem de um segmento de reta basta encontrar a imagem dos extremos e uní-los com um segmento de reta.

Laboratório 7 *Transformações lineares*1. A imagem de um segmento de reta

(a) *Considere a matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

i. *Defina a função linear*

$$f(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

em scilab e calcule a imagem do segmento

$$\overline{PQ}; P = (1, 2), Q = (2, 1)$$

por f .

ii. *Calcule a imagem do segmento*

$$\overline{MN}; M = (-3, 2), N = (3, -2)$$

por f . Analise o resultado e deduza qual é a imagem por f da reta $y = -\frac{2}{3}x$

iii. *Encontre uma relação da reta $y = -\frac{2}{3}x$ com a função f .*

iv. *Prove que uma função linear transforma um triângulo n'outro triângulo. O triângulo pode ser degenerado? Encontre um triângulo cuja imagem por f seja um triângulo degenerado.*

(b) imagem de polígonos

i. *Considere a matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

A. *Defina a função linear*

$$f(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

em scilab e calcule a imagem do segmento

$$\overline{PQ}; P = (1, 2), Q = (2, 1)$$

por f .

B. Encontre a imagem do triângulo de vértices

$$(1, 3), (3, 7), (0, 7)$$

pela matriz A .

ii. Calcule a imagem do segmento

$$\overline{MN}; M = (-3, 2), N = (3, -2)$$

por f . Analise o resultado e deduza qual é a imagem por f da reta $y = -\frac{2}{3}x$

iii. Encontre uma relação da reta $y = -\frac{2}{3}x$ com a função f .

iv. Prove que uma função linear transforma um triângulo n'outro triângulo. O triângulo pode ser degenerado? Encontre um triângulo cuja imagem por f seja um triângulo degenerado.

2. preservação dos ângulos

Triângulos semelhantes diferem entre si apenas (possivelmente) pelo tamanho. Prove que as transformações lineares do tipo

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

transformam triângulos em triângulos semelhantes.

3. Prove que uma função linear transforma um polígono de n lados n'outro polígono n lados, (possivelmente degenerado). Encontre quais são as funções lineares que transformam polígonos em polígonos semelhantes.

4. preservação da área Descubra quais são as funções lineares que preservam a área dos polígonos por elas transformados. Associe estas transformações lineares com um subconjunto de \mathbf{C} .

5. Números complexos e transformações do plano

Escreva uma pequena teoria que mostre o significado dos números complexos (e conseqüentemente as matrizes que eles representam) para as transformações do plano.

O último exercício do bloco acima tem uma resposta simplista que não é o que se espera que o leitor escreva. Se espera que o leitor use os fatos anteriores para chegar, dentro de uma pequena dissertação, ao resultado:

Teorema 7 Um tipo de transformação rígida do plano

As matrizes que representam transformações rígidas do plano são as matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \equiv (\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

Como estas matrizes representam os números complexos unitários, elas são chamadas *matrizes unitárias*. Mas a dissertação solicitada no exercício pode ir um pouco mais além das *matrizes unitárias*. Quando uma matriz representar um número complexo não unitário, ela ainda transforma polígonos em polígonos semelhantes. Então a dissertação solicitada deve concluir que as matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \equiv (a + bi)$$

são as matrizes que preservam a semelhança de polígonos, quando $(a + bi) \neq 0$.

Esta é a solução resumida do exercício.

Em resumo, as funções lineares são aquelas da forma

$$f(X) = \mathcal{A}X$$

em que a multiplicação é consistente. Se X for um número \mathcal{A} pode ser um número ou uma matriz. Se X for um vetor, \mathcal{A} deverá ser uma matriz que possa ser multiplicada por X à direita.

Neste parágrafo nos limitamos às funções lineares definidas em \mathbf{R}^2 e tomando valores em \mathbf{R}^2 e neste caso \mathcal{A} é uma matriz 2×2 .

Cabe menção especial às matrizes que representam os números complexos, as matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \equiv (a + bi)$$

porque elas transformam as figuras planas em figuras planas semelhantes, quando $a + bi \neq 0$. Em particular as transformações unitárias preservam a medida das figuras planas e representam os números complexos de módulo 1.

2.3 Funções lineares afins

Aqui vamos avançar um pouquinho mais em nossa generalização para tratar de funções cuja equação é da forma

$$f(x, y) = \mathcal{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathcal{B}$$

Vamos, construtivamente, descobrir que tipo de objeto pode ser \mathcal{B} . Estas funções generalizam as funções reais de valor real da forma

$$f(x) = ax + b ; a, b, x \in \mathbf{R}$$

que se chamam de *lineares afins*.

Queremos discutir que funções podem ter o formato

$$f(X) = \mathcal{A}X + \mathcal{B}$$

para generalizar as funções numéricas do tipo

$$f(x) = ax + b.$$

Se \mathcal{A} for uma matriz 2×2 , como até agora estivemos admitindo, o produto $\mathcal{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ resulta num vetor, uma matriz 2×1 o que força \mathcal{B} a ter esta mesma estrutura para que possamos efetuar a soma.

Então, dadas duas matrizes $\mathcal{A}, 2 \times 2$ e $\mathcal{B}, 2 \times 1$ podemos definir a função

$$f(x, y) = \mathcal{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathcal{B}.$$

Exemplo 2 *Um exemplo feito no scilab*

Verifique a definição a seguir, e se convença de todos os seus detalhes, em particular, o uso da transposição.

```
-->function u = f(x,y)
-->u = [4,-3;3,4]*[x,y]' + [3,2]'
-->endfunction
```

```
-->f(4,2)
ans =
```

```
! 13. !
! 22. !
```

Claro, scilab já verificou que estava tudo correto, caso contrário teria reclamado e tirado do bolso uma mensagem de erro adequada.

Usamos uma matriz \mathcal{A} que representa o número complexo $4 + 3i$ e isto significa que uma parte da operação de f consiste de rodar e produzir um esticamento, (rotação e homotetia).

E qual é o papel de $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$?

Veja o resultado aplicado em dois vetores (que determinam um segmento de reta), na figura (fig. 2.2) página 52. Primeiro vamos pedir que scilab calcule tudo. Observe que editamos o resultado obtido por scilab para incluir as expressões $f(P), f(O), R, Q$.

```
-->f(4,2) = f(P)
ans = R
```

```
! 13. !
! 22. !
```


-->f(1,4) = f(0)
ans = Q

! - 5. !
! 21. !

Portanto o gráfico deve nos apresentar o segmento de reta determinado pelos pontos $P = (4, 2)$, $O = (1, 4)$ e o segmento de reta determinado pelos pontos $R = (13, 22)$, $Q = (-5, 21)$.

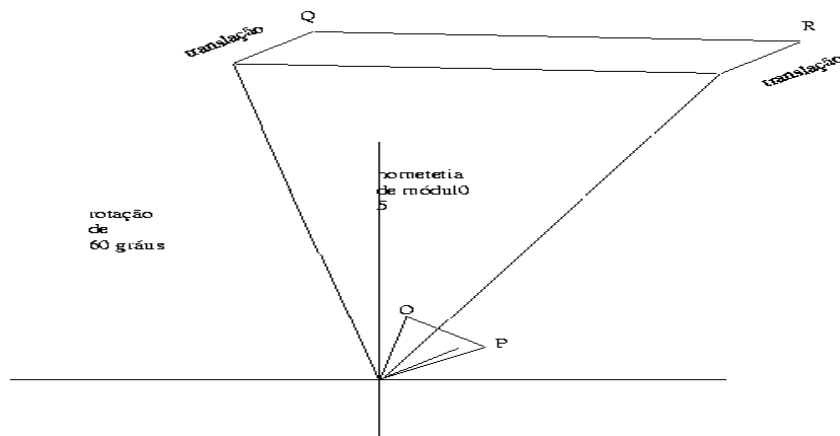


Figura 2.2: Rotação e homotetia seguidas de uma translação

Você pode identificar na (fig. 2.2) todas as etapas geométricas do processamento que f faz sobre o segmento de reta \overline{OP} . Aqui escolhemos desenhar, nesta ordem:

- a rotação de ângulo $36.8^\circ \approx \arccos(4/5)$;
- a homotetia de módulo $\sqrt{16+9} = 5$ de fato

$$5 * |OP| = 5 * \sqrt{13} = \sqrt{25 * 13} = \sqrt{325} = |QR|$$

- a translação evidenciada pelo paralelograma cujos lados são paralelos ao vetor $(3, 2)$

A imagem de O é $f(O) = Q$ e a imagem de P é $f(P) = R$.

Laboratório 8 Função linear afim

Ver solução na última parte do livro.

1. Propriedades das funções lineares afins Com base nas propriedades das funções lineares, liste as propriedades que sejam verdadeiras para as funções lineares afins.
2. A imagem do zero Prove que se f for uma função linear então a imagem do zero é zero, (falamos do vetor zero).
3. A imagem do zero Se numa função linear afim a imagem do zero for zero, então o termo independente é zero.
4. imagem de polígonos planos e função linear afim A imagem de um polígono regular convexo, por uma função linear afim, é um polígono regular convexo.
5. semelhança de polígonos preservada Uma função linear afim transforma polígonos em polígonos semelhantes se e somente se a função linear associada o fizer.
6. rotações

(a) Use `scilab` para verificar que

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

representa uma rotação do plano.

(b) Verifique que, use `scilab`, que

$$(x, y) \mapsto \mathcal{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

é uma rotação seguida de uma translação.

2.4 Sistemas lineares

Vimos que as matrizes servem para definir a equação de um tipo particular de funções que chamamos lineares.

Quando estudamos as funções polinômiais, dedicamos especial atenção às *equações polinômiais*. Como ficaria a solução das equações lineares? o que é uma equação linear?

2.4.1 Equações lineares

Em nossos primeiros estudos de Matemática, passamos pela equação do primeiro grau, que tem uma solução do tipo

$$ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

se o número a for diferente de zero. É natural nos perguntarmos se podemos fazer o mesmo com uma equação matricial.

Infelizmente as matrizes nem sempre tem inversas, de modo que, em geral não podemos resolver, de forma tão simples, uma equação matricial. O caminho mais curto para entender a solução deste problema passa por retornar um pouco do formalismo que acabamos de adotar e voltar a ver uma equação matricial como *um sistema de equações do primeiro grau*:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2 \end{cases} \quad (2.43)$$

cuja solução, por substituição, nos leva às expressões

$$x_1 = \frac{a_{22}c_1 - a_{12}c_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad (2.44)$$

$$x_2 = \frac{a_{11}c_2 - a_{21}c_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad (2.45)$$

em que nós identificamos os determinantes

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{bmatrix}; \quad (2.46)$$

e podemos voltar a escrever as soluções com esta nova notação

$$x_1 = \frac{\begin{bmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}; \quad x_2 = \frac{\begin{bmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}} \quad (2.47)$$

Entretanto esta volta ao passado não se deve prolongar muito, porque é extremamente difícil refazer a teoria usando os métodos artesanais com que os nossos antepassados a fizeram. *Subindo nos seus ombros, usando o que fizeram, podemos nos alçar a um vôo mais alto.* O próximo conjunto de exercícios é um laboratório em que iremos buscar a inspiração para a teoria que precisaremos.

O título da próxima lista de exercícios merece uma observação. Embora toda matriz tenha um determinante, na verdade um mesmo determinante corresponde a várias matrizes e portanto o título deveria ser *determinantes e suas matrizes...*

Laboratório 9 Matrizes e seus determinantes

1. Calcule os determinantes das matrizes (não precisa fazer todos, quando você descobrir o que está acontecendo, pare.)

$$\begin{array}{llll}
a) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} & b) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} & c) \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & d) \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \\
e) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & f) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & g) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & h) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
i) \begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & j) \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -0.5 & 0 \end{pmatrix} & k) \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} & l) \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

2. Resolva os sistemas de equações

$$\begin{array}{ll}
a) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} & b) \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
c) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & d) \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

3. Você pode usar scilab para corrigir os resultados dos exercícios. Veja a solução, comentada, do item (a) e resolva você mesmo os outros. Edite o texto do scilab explicando o que fizemos em cada linha (quase cada linha...).

```

-->:1> a = [3,2;1,-2]    ## a matriz do sistema
a =

    3    2
    1   -2

-->:2> b = [1,3]'    ## a matriz dos dados, transposta, naturalmente
b =

    1
    3

-->:3> x = a \ b    ## metodo do scilab para dividir matrizes
x =

    1
   -1

-->:4> ## a resposta x = (1,-1)

```

Siga os passos acima e verifique as suas respostas para a primeira questão.

4. Resolva manualmente o sistem

$$\begin{cases} 3x + 4y + 3z = 7 \\ 2x + 3y + 5z = 2 \\ x + 2y + 3z = 5 \end{cases} \quad (2.48)$$

e verifique sua resposta usando scilab

Resposta: $(x_1, x_2, x_3) = (-7.0000, 12.0000, -4.0000)$

5. determinante scilab sabe calcular determinantes, veja como:

```
-->:6> a = [3,4,5;2,3,5;1,2,3]
```

```
a =
```

```
3 4 5
2 3 5
1 2 3
```

```
-->:7> det(a)
```

```
ans = -2
```

Use a função `det()` do scilab para calcular os determinantes que foram solicitados mas que você deve ter calculado manualmente primeiro.

6. Encontre uma relação entre $\det(A)$ com

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

e o módulo de $z = a + bi$.

Observação 4 *Uso de computador versus saber fazer as coisas*

Tem sentido usarmos computadores ou máquinas de calcular, se soubermos o que estamos fazendo. Estes instrumentos vêm para agilizar o nosso trabalho e não para substituir o nosso pensamento. Não se engane, portanto, em apenas calcular com scilab ou qualquer outro programa de computador, sem saber primeiro fazer as contas com seus dedos.

Resolver sistemas 2 por 2 ou o cálculo de um determinantes de uma matriz 2 por 2, deve ser feito à mão, primeiro. Aqui lhe apresentamos um programa de computador para que você possa testar suas respostas. Ninguém, nenhum professor, vai resolver um sistema de 10 equações a 20 incógnitas a mão, seria absurdo. Para isto temos pacotes computacionais, ou sabemos fazer os pacotes computacionais. E você um dia deverá saber fazer ou melhorar um pacote computacional, se souber o que está fazendo.

Alguns dos exercícios do bloco acima sugerem que as equações lineares da forma

$$AX' = 0$$

tem sempre a solução $X = 0$ Esta verdade é parcial, a verdade toda é que pode haver soluções diferentes de 0.

Mas já podemos enunciar um teorema bem geral e prová-lo. Primeiro uma notação que importante pelo uso prático:

Definição 10 *Sistemas homogêneos*
Um sistema de equações da forma

$$AX' = 0$$

se designa por sistema de equações homogêneo.

Você não precisa decorar nomes, com o uso, esta denominação fará, naturalmente, parte integrante do seu vocabulário. O adjetivo *homogêneo* é difícil de ser explicado e tem vieses psicológicos. Mas é assim que nos referimos a uma equação linear em que a *matriz dos dados* é nula.

Teorema 8 *Sistemas homogêneos I* Todo sistema de equações lineares homogêneas tem pelos menos uma solução, o zero. **Dem**:

Porque, se uma matriz, de qualquer dimensão, for multiplicada, à direita por um vetor coluna nulo (ou à esquerda por um vetor linha nulo), o resultado do produto será um vetor nulo. **q.e.d.**

Este resultado simples é de grande importância e vai ser a chave de muita demonstração, posteriormente.

Está no exato momento para generalizarmos o resultado anterior. A lista de exercícios seguinte irá treiná-lo para entender os teoremas que enunciaremos em seguida.

Laboratório 10 *Sistemas homogêneos*

1. sistema indeterminado

(a) resolvendo um sistema de equações

i. Verifique que, no sistema
$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 0 \\ 6x + 4y + 8z = 0 \\ 2x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$$
 há duas equações

idênticas;

ii. reduza o sistema a duas equações apenas;

iii. elimine a variável y , explicita x em função de z e finalmente verifique que também é possível explicitar y em função de z .

(b) Resolva (manualmente) o sistema homogêneo
$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 0 \\ 6x + 4y + 8z = 0 \\ 2x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$$

(c) Verifique que as soluções seguintes todas servem para o sistema:

$$(-6, -7, 8), (0, 0, 0), (-3/4, -7/8, 1), (3/4, 7/8, -1)$$

portanto o sistema é possível, mas tem muitas soluções sendo indeterminado.

(d) Defina uma função linear em scilab com a matriz do sistema para verificar que as soluções propostas o são de fato.

(e) Encontre uma equação paramétrica para a solução.

resposta: $(-\frac{3z}{4}, -\frac{7z}{8}, z)$

O seguinte código *scilab* resolve a penúltima questão do *laboratório* acima.

```
-->:1> function f(x,y,z)
> [3,2,4;6,4,8;2,4,5]*[x,y,z]'
> endfunction
-->:2> f(-6,-7,8)
ans =

0
0
0
```

No laboratório em que você deve ter acabado de se treinar, vimos que os vetores-solução de um sistema homogêneo dependem todos do parâmetro z . Claro que você pode ter resolvido de forma diferente da sugestão que fizemos e ter concluído que os vetores todos dependem do parâmetro x . O importante é a *quantidade de parâmetros livres* na solução: um.

Vamos entender isto com um exemplo bem simples, fugindo, momentaneamente, do escopo que propusemos para este capítulo: \mathbf{R}^2 .

Exemplo 3 Interseção de dois planos segundo uma reta

Retomaremos, com outro enfoque, uma das questões do *laboratório* em que você trabalhou acima.

O sistema de equações
$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 0 \\ 6x + 4y + 8z = 0 \\ 2x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$$
 tem duas equações idênticas,

(informação repetida pode ser simplesmente ignorada), pelo menos inicialmente. Considerando apenas duas das equações temos as equações de dois planos

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 0 \\ 2x + 4y + 5z = 0 \end{cases} \quad (2.49)$$

Como é um sistema homogêneo, $(0, 0, 0)$ é uma solução, então os dois planos tem um ponto comum, logo

1. ou tem uma reta em comum;
2. ou coincidem

Decidindo qual das duas hipóteses, é a que vale.

Escreva o sistema assim:

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 3x + 2y + 4z = 0 \\ g(x, y, z) = 2x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$$

então as derivadas parciais⁷

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3; \quad \frac{\partial g}{\partial x} = 2; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 4; \quad \frac{\partial g}{\partial z} = 5$$

nos dizem que os planos são diferentes logo a verdade é

“os planos são diferentes, mas têm uma reta em comum”

que é a solução do sistema de equações, a reta, cuja equação paramétrica você encontrou no laboratório acima.

Estamos em condições de entender a generalização do teorema anterior. Os sistemas homogêneos tem uma solução garantida, o zero. Mas se houver uma solução diferente de zero ela não será única, vai haver *um espaço de soluções*. No presente exemplo uma reta, em que todos os vetores são múltiplos de uma solução qualquer (escolha um verá que os outros são múltiplos dele).

Quer dizer que se $X_0 \neq 0$ for solução do sistema $\mathcal{A}X = 0$ então λX_0 também será solução. Para prová-lo façamos as seguintes contas:

$$\mathcal{A}X_0 = 0 \tag{2.50}$$

$$\forall \lambda \in \mathbf{R}; \quad \lambda(\mathcal{A}X_0) = 0 = \mathcal{A}(\lambda X_0) = 0 \tag{2.51}$$

a segunda linha nas contas acima é consequência das propriedades da multiplicação de matrizes que já estudamos. Então λX_0 é solução do sistema homogêneo. Mas

$$\lambda X_0; \quad \lambda \in \mathbf{R}$$

é a equação paramétrica da reta que contém o vetor $X_0 \neq 0$.

Isto prova que se um sistema homogêneo tiver uma solução diferente de zero, a solução contém a reta cuja equação paramétrica é $\lambda X_0; \quad \lambda \in \mathbf{R}$.

Demonstramos assim o teorema

Teorema 9 *Sistemas homogêneos II*

Se um sistema homogêneo de equações lineares

$$\mathcal{A}X = 0$$

tiver uma solução $X_0 \neq 0$ então a reta de equação paramétrica

$$\lambda X_0; \quad \lambda \in \mathbf{R}$$

é solução do sistema também.

Algumas vezes a redação do teorema fica simplificada assim:

Teorema 10 *Sistemas homogêneos II*

Se $X_0 \neq 0$ for solução de $\mathcal{A}X = 0$ então λX_0 é também solução, para qualquer $\lambda \in \mathbf{R}$.

⁷mande e-mail para os autores explicando porque bastava calcular $\frac{\partial f}{\partial x} = 3; \quad \frac{\partial g}{\partial x} = 2$

agora a redação do teorema não está sugerindo que a solução seja somente o zero, mas como vale para qualquer $\lambda \in \mathbf{R}$ então vale para $\lambda = 0$ e, portanto, o zero é solução de um *sistema homogêneo*.

Observação 5 Usando scilab

Se você tiver resolvido o sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 0 \\ 6x + 4y + 8z = 0 \\ 2x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$$

usando o operador “/” do scilab, viu uma observação que precisamos comentar. Vamos fazer isto agora:

```
-->:1> a = [3,2,4;6,4,8;2,4,5]
```

```
a =
```

```
 3  2  4
 6  4  8
 2  4  5
```

```
-->:2> det(a)
```

```
warning: det: matrix singular to machine precision, rcond = 0
```

```
ans = 0
```

```
-->:3> b = [0,0,0]'
```

```
b =
```

```
 0
 0
 0
```

```
-->:4> a\b
```

```
warning: matrix singular to machine precision, rcond = 0
```

```
ans =
```

```
 0
 0
 0
```

A observação do scilab

warning: matrix singular to machine precision, rcond = 0

fala que a matriz é singular, do latim sozinho que em inglês também significa solteira (single).

scilab também lhe dá um aviso de que o cálculo do "zero" foi feito com a precisão da linguagem, (scilab também é uma linguagem de programação). Isto significa que você deve tomar as precauções o "zero" que a máquina encontrou...

Definição 11 *Matriz singular* Se chamam singulares as matrizes que não têm inversas (ou equivalentemente) cujo determinante é zero.

Observação 6 *Limitações da computação* A solução feita acima do sistema de equações, usando scilab, nos permite tirar uma lição sobre as limitações da computação para resolver problemas.

O programa não foi capaz de fazer o que nós fizemos manualmente, encontrar uma reta contida no espaço solução do sistema.

Um dos autores deste texto tem um programa que consegue fazer um pouco mais do que scilab. O programa `sistema.pas`, que pode ser encontrado no arquivo `pas.zip` em [13], quando detecta que o determinante da matriz é zero, calcula uma solução diferente de zero e emite uma mensagem semelhante a esta do scilab. Mesmo assim é uma solução limitada, porque, digamos, achou somente uma reta contida na solução e pode haver muito mais do que uma reta.

Mas nós, os humanos, sabemos fazê-lo e você vai aprender a fazer isto, aqui, com auxílio de um programa de computação para agilizar as contas.

Em resumo, vimos aqui que os determinantes das matrizes de um sistema de equações definem se o sistema tem solução única ou se serão múltiplas as soluções, caso existam.

Os sistemas de equações lineares homogêneos sempre tem pelo menos uma solução, o zero, mas se tiverem solução diferente de zero será, pelo menos, uma reta inteira.

Precisamos de uma conceituação mais ampla para encontrar todas as soluções de um sistema de equações lineares, mas você vai ver que a solução da equação homogênea é um passo decisivo.

2.5 Exercícios: sistemas lineares.

Exercícios 3 *Sistemas lineares*

1. Momento angular Considere três objetos dos quais, um a massa é conhecida, 2 kg, e desejamos descobrir a massa dos outros dois. Experimentando com uma barra métrica descobrimos o que se pode ver na figura (fig. 2.3) página 62. Escreva o sistema de equações envolvendo as tres massas e calcule as massas desconhecidas.

2. Compostos químicos⁸

Podemos compor, sob condições controlada, tolueno C_7H_8 com ácido nítrico HNO_3 para produzir trinitrotolueno $C_7H_5O_6N_3$ mais água. A proporção da mistura é determinada pelo número de átomos presentes antes da reação

⁸O exercício não sugere que você lide com compostos químicos, eles podem ser tóxicos. O objetivo é apenas exemplificar o uso de sistemas lineares. ver http://www.atsdr.cdc.gov/es/toxfaqs/es_tfacts56.html

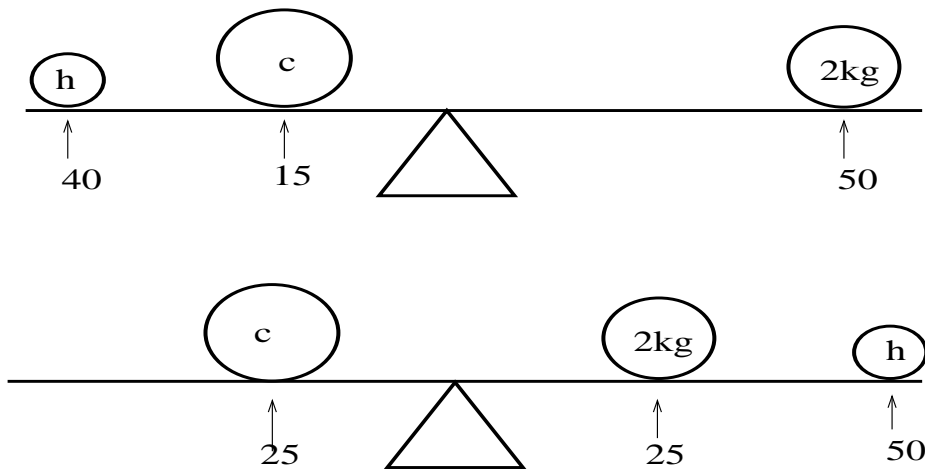
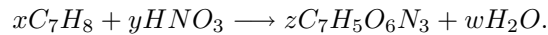


Figura 2.3: Experimentos com massa e momento

química, sendo igual ao número de átomos depois da reação. O número de átomos estão indicados como sub-índices na fórmula química,



Ache o sistema de equações lineares que descreve a quantidade de átomos desta reação química.

3. combinação linear inteira Um terminal bancário está programado para fornecer cédulas de 10, 20, 50 reais

Construa em `scilab` uma função que estipule a quantidade de cédulas de cada um dos valores que a máquina pode fornecer, para um valor que o usuário deseje. Veja no "help" do `scilab` a função "fix". Na linguagem `C` esta função equivale a divisão (que é inteira em `C`).

4. Discretização de um sistema Numa estrutura metálica, ver figura (fig. 2.4) página 63, se admite que as forças atuem nos seus nós (nas juntas). Na figura considerada existem 8 nós. Suponha que seja uma estrutura tridimensional e portanto em cada nó consideramos as forças $(f_{k,x}, f_{k,y}, f_{k,z})$. Na figura (fig. 2.4) você pode ver algumas dessas forças, $(f_{3,x}, f_{3,y})$, representadas.

Se interpretarmos

$$f_{k,x} = \frac{\partial F}{\partial e_k}$$

podemos dizer que a figura (fig. 2.4) representa a discretização de um sistema, por exemplo da gravidade, obtido com a análise estrutural feita nos 8 nós considerados

- (a) Escreva a matriz \mathcal{A} , de dimensão 8×3 , que descreve este sistema.

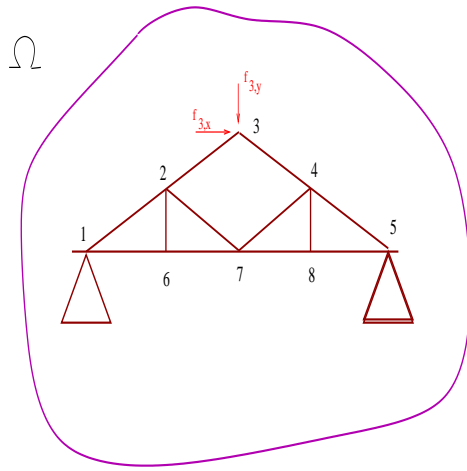


Figura 2.4: Distribuição de forças numa estrutura metálica

(b) Se o sistema for estático (sem movimento) então a resultante é zero. Exprese isto com um sistema linear.

Solução 2 (a)

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial e_1} & \frac{\partial F_1}{\partial e_2} & \frac{\partial F_1}{\partial e_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_8}{\partial e_1} & \frac{\partial F_8}{\partial e_2} & \frac{\partial F_8}{\partial e_3} \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

(b)

Capítulo 3

Espaço Vetorial

Vamos formalizar neste capítulo o espaço de chegada e saída onde as matrizes estão definidas como funções lineares. O conceito “*dimensão*”, que vem sendo usado até agora de forma intuitiva, será aqui formalizado.

3.1 O espaço \mathbf{R}^2

Já estudamos o \mathbf{R}^2 confundido com os números complexos. Agora vamos dar a este espaço a sua identidade própria. No capítulo 1 mostramos o funcionamento geométrico dos números complexos que chamamos de vetores do plano. Fizemos um jogo duplo entre duas notações:

$$\mathbf{C} \ni w = c + di \equiv (c, d) \in \mathbf{R}^2.$$

Neste capítulo vamos nos dedicar exclusivamente ao vetor

$$(c, d) \in \mathbf{R}^2$$

e as propriedades do espaço \mathbf{R}^2 de tais vetores.

Registre em sua mente para uso futuro, enquanto estávamos estudando as funções lineares complexas as únicas matrizes que apareceram foram do tipo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

determinadas apenas por dois números. Esta simples detalhe vai ser muito importante aqui e em outras situações de matemática mais avançada.

3.1.1 A estrutura algébrica de \mathbf{R}^2

Podemos identificar as seguintes operações que sabemos fazer com um par $(x, y) \in \mathbf{R}^2$

- Adição $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$. Como no caso dos complexos, somamos as coordenadas de mesmo índice.

1. comutatividade A adição é comutativa

$$X + Y = Y + X;$$

2. existência do elemento neutro $(0, 0)$ é o elemento neutro desta operação

$$X + 0 = X ; (a, b) + (0, 0) = (a, b);$$

3. existência do inverso aditivo $(-x_1, -x_2)$ é o inverso aditivo de (x_1, x_2)

$$(-x_1, -x_2) + (x_1, x_2) = (0, 0);$$

4. associatividade da adição A adição é associativa,

$$X + (Y + Z) = (X + Y) + Z;$$

Isto torna $(\mathbf{R}^2, +)$ um grupo comutativo.

- Multiplicação por um escalar Qualquer número real λ , (um escalar), pode ser multiplicado por um par ordenado (x, y) de acordo com a regra

$$[\lambda, (x, y)] \mapsto (\lambda x, \lambda y) \in \mathbf{R}^2.$$

1. Vale a associatividade à esquerda

$$\alpha(\lambda(x, y)) = (\alpha\lambda)(x, y)$$

2. o elemento neutro da multiplicação não altera o multiplicando (não podemos dizer que ele é um elemento neutro...)
3. o elemento neutro da adição torna nulo o multiplicando

$$0(x, y) = (0, 0)$$

4. Vale a distributividade da multiplicação por um escalar relativamente à soma de vetores

$$\lambda[(x_1, x_2) + (y_1, y_2)] = \lambda(x_1, x_2) + \lambda(y_1, y_2)$$

Vemos assim que todas as operações do corpo dos escalares $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ se encontram envolvidas na nova estrutura que se chama *espaço vetorial real*. O adjetivo real vem do corpo \mathbf{R} dos números reais. Temos também espaços vetoriais complexos, se o corpo dos escalares for \mathbf{C} .

Os exemplos que daremos a seguir são exercícios que o leitor deve fazer. Alguns deles o irão conduzir a relembrar alguns teoremas do Cálculo.

Exemplo 4 *Espaços vetoriais*

1. Espaço vetorial real

O conjunto $\mathbf{R}[x]$ dos polinômios a uma variável com coeficientes reais é um espaço vetorial real. O leitor curioso deverá verificar que todas as propriedades listadas acima valem.

2. Espaço vetorial dos polinômios a coeficientes complexos

O conjunto $\mathbf{C}[z]$ dos polinômios a coeficientes complexos é um espaço vetorial sobre o corpo \mathbf{C} dos números complexos, portanto um espaço vetorial complexo.

3. Espaço vetorial complexo

o conjunto dos números complexos, \mathbf{C} é um espaço vetorial complexo, assim como \mathbf{C}^2 o conjunto dos pares ordenados de números complexos.

4. Espaço vetorial real

O conjunto dos ternos ordenados, $\{(x, y, z) ; x, y, z \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R}^3$ é um espaço vetorial real.

5. Espaço vetorial real

O espaço de todas as funções contínuas, definidas no intervalo $[a, b]$ e tomando valores na reta, (funções reais, contínuas com valores no intervalo $[a, b]$) é um espaço vetorial real.

Se você trocar “contínua” por “diferenciável” tem outro exemplo de espaço vetorial real. Alguns teoremas típicos do Cálculo são da estrutura de espaço vetorial real que estas funções, tem, por exemplo

Teorema 11 Soma de funções contínuas

A soma de duas funções definidas no $[a, b]$ e contínuas neste intervalo é uma função contínua definida em $[a, b]$.

Troque continuidade por diferenciabilidade e você terá outro teorema conhecido.

O módulo de um vetor do \mathbf{R}^2 se calcula de forma idêntica a dos números complexos. O módulo algumas vezes se chama de *norma*.

Definição 12 Módulo de um vetor do \mathbf{R}^2 Se $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ então $|(x, y)| = \sqrt{a^2 + b^2}$ é o tamanho do segmento de reta que vai do ponto (x, y) até a origem $(0, 0)$ Dizemos

O próximo laboratório vai exercitá-lo no uso destes conceitos.

Laboratório 11 Espaço vetorial normado

1. cálculo da norma com scilab Defina a função **norma** no scilab e calcule as normas (módulos) dos vetores

$$u \in \{(1, 3), (3, 4), (-3, 4), (-4, 3), (-3, -4), (0, 3), (4, 0)\}$$

resposta


```
-->1> u = [1,3]
```

```
u =
```

```
1 3
```

```
-->2> function y = norma(u)
```

```
> y = sqrt(u(1)^2 + u(2)^2)
```

```
> endfunction
```

```
-->3> norma(u)
```

```
ans = 3.1623
```

```
-->4>
```

2. Defina em scilab uma função que, recebendo um escalar e um vetor, retorne o produto do vetor pelo escalar e calcule o produto dos vetores

$u \in \{3, (1, 3), -1, (3, 4), -2, (-3, 4), 0, (-4, 3), 0.5, (-3, -4), -1, (0, 3), 4, (4, 0)\}$

pelo escalar que o antecede. resposta

```
-->1> u = [1,3]
```

```
u =
```

```
1 3
```

```
-->2> function v = escalar(s,u)
```

```
> v = [s*u(1) , s*u(2)]
```

```
> endfunction
```

```
-->3> escalar(3,u)
```

```
ans =
```

```
3 9
```

3. Defina em scilab uma função que, recebendo um escalar e um vetor, retorne o produto do vetor pelo escalar, mas que o vetor resultante seja um vetor coluna. Calcule o produto dos vetores

$u \in \{3, (1, 3), -1, (3, 4), -2, (-3, 4), 0, (-4, 3), 0.5, (-3, -4), -1, (0, 3), 4, (4, 0)\}$

pelo escalar que o antecede. resposta

```
-->1> u = [1,3]
```

```
u =
```

```
1 3
```

```
-->2> function v = escalar(s,u)
> v = [s*u(1) , s*u(2)]'
> endfunction
-->3> escalar(3,u)
ans =
```

```
|3 |
|9 |
```

4. Verifique que o scilab sabe somar vetores calculando $u+v$ depois de definir:
 $u = [1, 3], v = [2, 4]$ Verifique que scilab calcula o valor de x em

$$x = u - v$$

5. Considere o conjunto \mathcal{E} de todas as funções reais definidas no conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

(a) Prove que $(\mathcal{E}, +, \cdot)$ é um espaço vetorial real.

(b) Considere $f \in \mathcal{E}$ e conseqüentemente

$$f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$$

são números reais. Defina uma função de

$$\mathcal{E} \xrightarrow{\Phi} \mathbf{R}^5$$

tal que

$$f(i) \mapsto x_i = f(i) ; x \in \mathbf{R}^5$$

Prove que

(a) Φ é linear

i. $\Phi(f + g) = \Phi(f) + \Phi(g)$

ii. $\Phi(\lambda f) = \lambda\Phi(f) ; \forall \lambda \in \mathbf{R}$

(b) $\Phi(0) = 0$ em que o argumento de Φ tem que ser a função zero (identicamente nula).

(c) $\Phi(f) = 0$ se e somente se $f = 0$

(d) Mostre que Φ é bijetiva.

6. Produto Interno Definimos em \mathbf{R}^2 a função

$$\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} ; \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x_1y_1 + x_2y_2$$

que chamamos de produto interno e para a qual usamos a notação

$$\langle x, y \rangle$$

Observação O produto interno é também chamado produto escalar.

(a) bilinearidade do produto interno Prove que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é linear em cada uma das variáveis:

i. $x \mapsto \langle x, y \rangle$ é linear considerado y fixo e

ii. $y \mapsto \langle x, y \rangle$ é linear considerado x fixo.

(b) Produto interno e módulo Considere $u, v \in \mathbf{S}^1$ dois pontos do círculo trigonométrico, então

$$u \equiv (\cos(\alpha), \sin(\alpha)) ; v \equiv (\cos(\beta), \sin(\beta))$$

para dois números reais α, β . Calcule o produto interno de u por v e verifique que

$$\langle u, v \rangle = \cos(\theta)$$

sendo θ o ângulo entre u e v

(c) Produto interno e módulo Prove que para dois vetores quaisquer $u, v \in \mathbf{R}^2$

$$\langle u, v \rangle = |u||v|\cos(\theta)$$

em que θ é o ângulo entre os dois vetores u, v

7. regra do paralelograma Prove, usando semelhança de triângulos, que a regra do paralelograma corresponde de fato a soma e a diferença algébrica de dois vetores (uma das diagonais representa a soma, a outra representa a diferença). Explícite tudo.

8. Prove que, dados tres vetores $u_1, u_2, u_3 \in \mathbf{R}^2$ não colineares dois a dois, então existem tres escalares, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ não nulos tal que

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$$

Descreva o significado geométrico desta questão (sugestão, use a palavra “triângulo”).

Solução em scilab

```
-->1> function  escala(1,u,v,w)
> -1*det([w(1),w(2);v(1),v(2)])/det([u(1),u(2);v(1),v(2)])
> -1*det([u(1),u(2);w(1),w(2)])/det([u(1),u(2);v(1),v(2)])
> endfunction
-->2> escala(7,[2,2],[3,1],[4,0])
ans = 7
ans = -14
-->3>
```

$$7 * u - 14 * v + 7 * w = 7(2, 2) - 14(3, 1) + 7(4, 0) = 0$$

a ordem dos parâmetro tem significado, o primeiro é um escalar e os três outros são vetores do plano dois a dois não colineares.

Significado geométrico

Dados tres vetores dois a dois não colineares, podemos construir um triângulo com lados paralelos aos vetores dados, e se dado um dos escalares que irá multiplicar um dos lados, podemos encontrar os outros dois escalares.

Veja na figura (fig. 3.1) página 71, um exemplo de tres segmentos de reta não colineares dois a dois e o triângulo que pode ser obtido com eles com a função `escala()`. A solução não é única, muitos triângulos semelhantes podem assim ser obtidos.

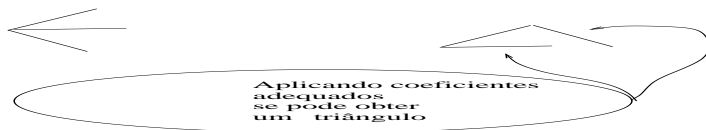


Figura 3.1: três vetores não colineares dois a dois formam um triângulo

3.2 Dependência linear

Este é um dos conceitos centrais da Álgebra Linear com o qual poderemos definir dimensão. Uma forma intuitiva de compreendê-lo é a seguinte: considere que você tem n informações, mas algumas delas sejam consequência de outras do mesmo conjunto, então você na verdade tem menos do que n informações e o conjunto de informações que você tem é *redundante* o que significa que um conjunto menor de informações lhe diz tudo. Um conjunto de vetores *linearmente dependentes* é um conjunto redundante e que pode ser reduzido a um conjunto menor que diz tudo sobre o espaço a que eles pertencem. Vamos transformar estas idéias numa *técnica*...

Exemplo 5 *Redundância* Começamos por explicar dependência linear usando o adjetivo redundância. Se este adjetivo não estiver claro, tão pouco terá ficado claro o que é dependência linear.

Vejamos um exemplo.

Suponha que se deseje calcular a inflação de um determinado mês e que para isto se eleja a cesta básica

feijão, açúcar, arroz, leite, farinha

Levantados os preços (suponha) se verifica que os preços do feijão e da farinha foram exatamente os mesmo em todos os dias do do mês. A cesta básica acima é redundante do ponto de vista do cálculo da inflação¹ e deveria ser considerada a cesta

açúcar, arroz, leite, farinha

É isto que vamos fazer aqui, descobrir quais são os conjuntos redundantes do ponto de vista de geração de um espaço vetorial por um conjunto de vetores.

Temos que começar definindo o que é *gerar um espaço vetorial*. As combinações lineares de vetores são o instrumento certo.

Definição 13 *Conjunto gerador de um espaço vetorial*

Dizemos que um conjunto

$$b = \{e_1, \dots, e_n\}$$

é um conjunto gerador de um espaço vetorial \mathcal{E} se todo elemento de \mathcal{E} pode ser obtido como combinação linear dos elementos de \mathbf{b}

Dizemos também que

$$e_1, \dots, e_n$$

são geradores de \mathcal{E} . Notação

$$[e_1, \dots, e_n] = [\mathbf{b}] = \mathcal{E}$$

Exemplo 6 *Geradores do \mathbf{R}^2*

- Um conjunto gerador do \mathbf{R}^2

Vamos mostrar que os vetores

$$b_1 = \{(1, 0), (1, 1)\}$$

geram o \mathbf{R}^2 , quer dizer que qualquer elemento do \mathbf{R}^2 pode ser obtido como combinação linear dos elementos deste conjunto:

$$\text{considere dois escalares } a, b \tag{3.1}$$

$$a(1, 0) + b(1, 1) = (a + b, b) = (x_1, x_2) \tag{3.2}$$

$$\text{é preciso que } a + b = x_1, b = x_2 \tag{3.3}$$

$$\text{deduzimos que } b = x_2 \text{ e } a = x_1 - b = x_1 - x_2 \tag{3.4}$$

portanto com escalares $a = x_1 - x_2, b = x_2$ podemos gerar o elemento genérico $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$. Mais concretamente

$$a = 3 - 5, b = 5 \Rightarrow (3 - 5)(1, 0) + 5(1, 1) = (3, 5)$$

¹a menos que se deseje viciar o resultado ...

• Um outro conjunto gerador do \mathbf{R}^2

Vamos agora considerar o conjunto

$$b_2 = \{(1, 0), (0, 1)\}$$

Queremos mostrar que também qualquer elemento do \mathbf{R}^2 pode ser obtido como combinação linear destes vetores e portanto que não há unicidade nesta escolha.

Tome um elemento qualquer $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$.

Podemos escrever:

$$(x_1, x_2) = x_1(1, 0) + x_2(0, 1)$$

o que mostra que um elemento qualquer do \mathbf{R}^2 é uma combinação linear de dos elementos do conjunto

$$\{(1, 0), (0, 1)\}$$

Mais concretamente:

$$3(1, 0) + 5(0, 1) = (3, 5).$$

Portanto

$$b_2 = \{(1, 0), (0, 1)\}, b_1 = \{(1, 0), (1, 1)\},$$

são conjuntos geradores de \mathbf{R}^2 .

• Um conjunto gerador redundante

Vamos mostrar que o conjunto

$$b_3 = \{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$$

também serve para gerar o \mathbf{R}^2 mas que neste caso existem informações de sobra.

$$\text{considere três escalares } a, b, c \tag{3.5}$$

$$a(1, 0) + b(0, 1) + c(1, 1) = (a + c, b + c) = (x_1, x_2) \tag{3.6}$$

$$\text{é preciso que} \tag{3.7}$$

$$a + c = x_1 \tag{3.8}$$

$$b + c = x_2 \tag{3.9}$$

$$\text{donde deduzimos que} \tag{3.10}$$

$$a - b = x_1 - x_2 \Rightarrow a = x_1 - x_2 + b \tag{3.11}$$

$$\text{substituindo na primeira equação} \tag{3.12}$$

$$x_1 - x_2 + b + c = x_1 \tag{3.13}$$

$$c = x_2 - b \tag{3.14}$$

Conclusão, os três escalares a, b, c necessários para gerar

$$(x_1, x_2)$$

a partir de

$$b_3 = \{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$$

podem ser obtidos de muitas maneiras a partir de uma escolha feita de b . Quer dizer que não é 'única a forma de gerar

$$(x_1, x_2)$$

a partir de

$$\{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$$

porque tem excesso de informação neste conjunto. Aliás, já havíamos visto que o conjunto

$$\{(1, 0), (0, 1)\}$$

era suficiente para gerar o \mathbf{R}^2 .

Portanto b_1, b_2, b_3 são geradores de \mathbf{R}^2 .

O projeto

Os exemplos acima mostraram que um conjunto de geradores não precisa ser único.

O nosso projeto agora é encontrar um conjunto ótimo para gerar um espaço vetorial. Este conjunto ótimo será chamado de *base do espaço*. Nós também veremos que mesmo os conjuntos que caracterizamos como *ótimos* tão pouco serão únicos a quantidade dos elementos da *base* será 'única e irá caracterizar a dimensão do espaço.

3.2.1 Dependência linear

Em Álgebra Linear, *redundância* significa *Dependência linear*.

Definição 14 *Dependência linear* Um conjunto de n vetores é dito linearmente dependente se um dos vetores do conjunto pode ser escrito como combinação linear dos demais.

Alguns exemplos.

Exemplo 7 *Vetores linearmente dependentes*

1. O conjunto de vetores $E = \{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ é linearmente dependente no \mathbf{R}^2 por que

$$(1, 1) = (1, 0) + (0, 1)$$

e portanto o vetor $(1, 1)$ pode ser escrito como combinação linear dos outros dois.

2. Dois vetores colineares são linearmente dependentes porque um deles é combinação linear do outro (uma combinação linear) unitária, (lembre-se do fatorial de zero...) Melhor, dois vetores colineares se encontram sobre uma mesma reta (passando pela origem, porque?).

(a) Eles podem ter mesmo sentido, e então existe um escalar positivo permitindo passar de um para o outro, veja na figura (fig. 3.2) página 75, os vetores colineares de mesmo sentido, u, v e os vetores colineares, mas de sentidos inversos, w, z .

Em ambos os casos temos a combinação linear

$$u = rv ; w = sz$$

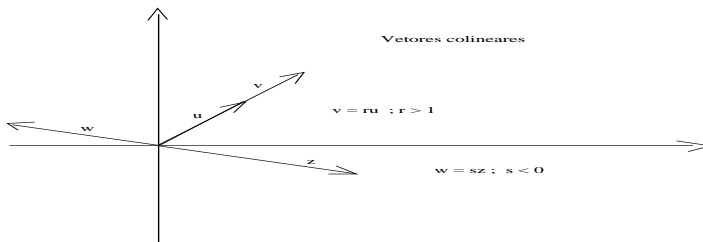


Figura 3.2: Vetores colineares são linearmente dependentes

(b) Um dos exercícios que você fez (!) estabelecia que se fossem dados tres vetores não colineares dois a dois no plano, seria possível com eles montar um triângulo e portanto a resultante destes vetores (com escalares adequadamente escolhidos) seria nula:

$$\lambda u + \alpha v + \gamma w = 0 \quad (3.15)$$

$$w = -\frac{\lambda}{\gamma}u - \frac{\alpha}{\gamma}v \quad (3.16)$$

a segunda linha é possível se $\lambda \neq 0$ e isto é sempre possível se os vetores não forem colineares dois a dois.

Podemos tirar a hipótese restritiva de que os vetores não sejam colineares dois a dois, o que pode resultar num triângulo degenerado, um triângulo que fique em cima de uma reta (lembre-se do fatorial de zero...). Neste caso um dos escalares da combinação linear pode ser

zero e o caso dos tres vetores recai simplesmente no item anterior: vetores colineares.

O seguinte resultado é usado como definição de *linearmente dependente*.

Teorema 12 Dependência linear

Seja $E\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ um conjunto de vetores linearmente dependente, então existe uma combinação linear não trivial tal que

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = 0$$

Dem.: Por combinação linear trivial entendemos aquela em que todos os coeficientes são nulos.

Se é assim então, como alguma dos escalares é diferente de zero, seja, sem restringir a generalidade, λ_1 , temos

$$u_1 = \sum_{k=2}^n \frac{\lambda_k}{\lambda_1} u_k$$

e u_1 pode ser escrito como combinação linear dos demais.

Reciprocamente, se algum dos vetores, por exemplo u_1 puder ser escrito como combinação linear dos demais então podemos escrever a combinação linear não trivial

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = 0$$

Isto mostra, como pretendiamos, que o resultado é equivalente a definição de dependência linear.

q.e.d.

Enfim, se um conjunto de vetores for *linearmente dependente*, por definição, pelo menos um dos vetores do conjunto pode ser escrito como combinação linear dos demais, então o conjunto é redundante. Então este vetor que pode ser escrito em termos dos outros pode ser retirado do conjunto uma vez que os outros já o representam. Vamos partir desta ideia para montar o conceito inverso de dependência linear.

Suponhamos que do conjunto de vetores

$$E\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$$

se tenha tirado toda a redundância possível e portanto nenhum vetor do conjunto pode ser escrito como combinação linear dos demais. Então pelo teorema acima a combinação linear

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = 0$$

só pode ser a trivial: os escalares todos são zeros. Assim temos a definição do conceito inverso de *dependência linear*.

Definição 15 Independência linear Um conjunto de vetores

$$E\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$$

é linearmente independente se e somente se

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = 0$$

for a combinação linear trivial: todos os coeficientes são nulos.

Exemplos

Um critério prático para testar se uma coleção de vetores é linearmente independente consiste em

- Escrever uma combinação linear nula dos vetores;
- Verificar se a solução do sistema, as variáveis são os escalares-coeficientes da combinação linear, é a trivial (zero).

Exemplo 8 Conjuntos linearmente independentes

1. Polinômios Um resultado muito usado na Escola Secundária diz que se um polinômio for identicamente nulo

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \equiv 0$$

então todos os coeficientes são nulos.

Porque os vetores

$$x^n, x^{n-1}, \dots, x, 1$$

são linearmente independentes. Um polinômio de grau k não pode ser escrito como combinação linear de polinômios de grau diferente de k .

2. Qual é o significado de uma equação Uma equação, por exemplo

$$x^2 - 2x - 15 = 0 \equiv x^2 = 2x + 15$$

somente é verdadeira para um número finito de valores da incógnita. Numa equação do grau n , para exatamente n valores da incógnita (no caso de polinômios sobre o corpo dos complexos). Ou seja

$$x^2 - 2x - 15 \neq 0.$$

mas $x^2 - 2x - 15 = 0$ é verdadeira para $x \in \{-3, 5\}$. Insistindo, os vetores $x^2, x, 1$ não são linearmente dependentes.

3. Dois vetores não colineares Dois vetores não colineares são linearmente independentes.
4. Três vetores não colineares no plano são linearmente dependentes, ver exercício 8, 70. A resultante é necessariamente nula.
5. Três vetores não colineares no “espaço” não precisam ser linearmente dependentes. Porque suas coordenadas são a matriz de um sistema de equações. Considere os três vetores, u_1, u_2, u_3 e uma combinação linear nula deles:

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0 \quad (3.17)$$

$$\begin{cases} u_{11}\lambda_1 + u_{12}\lambda_2 + u_{13}\lambda_3 = 0 \\ u_{21}\lambda_1 + u_{22}\lambda_2 + u_{23}\lambda_3 = 0 \\ u_{31}\lambda_1 + u_{32}\lambda_2 + u_{33}\lambda_3 = 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

$$\text{Se } \det \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} \neq 0 \quad (3.19)$$

$$\text{então o sistema tem solução única} \quad (3.20)$$

e como o sistema é homogêneo, a solução única é zero.

Podemos enunciar um outro critério prático para verificação da independência linear de uma coleção de vetores:

Teorema 13 *Independência linear*

Uma coleção de vetores

$$u_1, \dots, u_n$$

é linearmente independente se $\det(u_1, \dots, u_n) \neq 0$

Dem.: Porque o sistema de equações lineares cuja matriz for as coordenadas dos vetores

$$u_1, \dots, u_n$$

terá solução única. **q.e.d.**

As expressões *linearmente dependente* e *linearmente independente* são comumente abreviadas usando-se as iniciais: *l.d.*, *l.i.*.

3.3 Dimensão

Há algum tempo estamos falando de *geradores* de um espaço. Agora temos as condições necessárias para deixar esta questão fechada.

As combinações lineares de um conjunto de vetores geram alguma coisa, um espaço de vetores, um espaço vetorial. Se a coleção de vetores for ótima, (não redundante), linearmente independente, então o número de elementos desta coleção é uma característica do espaço chamada **dimensão**.

Definição 16 *Dimensão*

A dimensão de um espaço vetorial é o número de vetores linearmente independentes necessários para gerá-lo.

Exemplo 9 *Dimensão*

1. O plano tem dimensão dois Porque três vetores no plano são *l.d.*, veja exercício 8, 70.
2. O espaço 3D tem dimensão três Porque dois vetores são insuficientes para gerar o espaço que convencionalmente chamamos de 3D. Quatro vetores no espaço 3D são *l.d.* Consequentemente o número exato de vetores necessários para gerar o espaço 3D é três vetores *l.i.*

3. A dimensão é um número ótimo Para cada espaço vetorial existe um número ótimo de vetores l.i. que o geram. Qualquer conjunto de dois vetores l.i. geram o plano. Qualquer conjunto de três vetores l.i. geram o espaço 3D. Dizer que um espaço é de dimensão n significa que é necessário um conjunto de n vetores l.i. para gerá-lo.
4. Espaço de dimensão quatro Considere o conjunto seguinte de polinômios:

$$E = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2, x + x^2 + x^3, x^3, x^2 + x^3\}$$

O conjunto consiste de 6 vetores, e a pergunta é: qual é a dimensão do espaço que eles geram? Para responder a esta pergunta o primeiro passo é verificar se o conjunto é l.i. e se não for, extrair deles vetores excedentes, torná-lo não redundante. Uma rápida inspeção nos chama atenção de que existe mais de um polinômio contendo x^3 o que é indício de que o conjunto é l.d. Verificando, vamos colocar os vetores do conjunto de geradores entre parêntesis para deixar claro o que estamos fazendo.

$$x + x^2 + x^3 = (x^2) + (x^3) + (1 + x) - (1) \quad (3.21)$$

o que mostra que o vetor $x + x^2 + x^3$ pode ser escrito como combinação linear de quatro outros elementos do conjunto E . Portanto E não é um conjunto l.d. de vetores. Retirando $x + x^2 + x^3$ do conjunto e temos:

$$E_2 = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2, x^3, x^2 + x^3\}$$

Por razão semelhante identificamos outro polinômio que pode ser retirado do conjunto:

$$x^2 + x^3 = (x^3) + (1 + x + x^2) - (1 + x)$$

e assim vamos obter

$$E_3 = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2, x^3\}$$

Agora nenhum dos vetores de E_3 pode ser escrito como combinação linear dos demais, sendo então o conjunto E_3 l.i. e assim gerando um espaço vetorial de dimensão 4. O conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a 3 é um espaço vetorial de dimensão 4.

5. Espaço de polinômios Vamos resolver a questão anterior de forma diferente, usando diretamente a definição de dependência linear. Primeiro escrevemos a combinação linear dos elementos de E (colocamos os “geradores” entre parêntesis), depois rearrumamos a expressão de acordo com as potências de x (equivalência de expressões algébricas).

$$\lambda_1(1) + \lambda_2(1 + x) + \lambda_3(1 + x + x^2) + \lambda_4(x + x^2 + x^3) + \lambda_5(x^3) + \lambda_6(x^2 + x^3) = 0$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)x + (\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_6)x^2 + (\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6)x^3 \equiv 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_6 = 0 \\ \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_3 - \lambda_5 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_6 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_4 = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} \lambda_3 = \lambda_5 \\ \lambda_2 = \lambda_6 \\ \lambda_1 = \lambda_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

que reduz as variáveis a apenas três.

Observe que as variáveis são os números λ_i e que os polinômios são os dados do problema, e portanto as constantes.

O sistema de equações fica reduzido a uma equação para a qual podemos encontrar a solução particular

$$\lambda_1 = 0 ; \lambda_2 = 1 ; \lambda_3 = -1$$

donde deduzimos que, não necessariamente:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0$$

portanto o conjunto de vetores

$$E = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2, x + x^2 + x^3, x^3, x^2 + x^3\}$$

é l.d.

Este método não conduz à resposta imediata sobre a dimensão do espaço gerado pelos vetores, mas uma prática na solução de sistema lineares permite deduzir qual a dimensão diretamente deste resultado, como veremos depois. No momento não resta outra saída que descobrir quais os vetores que podem ser escrito como combinação linear dos outros e retirá-los do conjunto E como já fizemos anteriormente.

Exercícios 4 Dependência linear

1. Para que valores de a os vetores

$$(a, 3, 6), (1, a, -2), (0, -1, 2)$$

são linearmente dependentes.

2.

3.

Falamos até agora em conjunto gerador de um espaço vetorial e mencionamos a dimensão. Agora vamos aprender a calcular a dimensão de um espaço vetorial

Os exemplos que desenvolvemos mostram que podemos ter vários geradores para um espaço vetorial, os polinômios de grau menor ou igual a três podem ser gerados por

$$E_1 = \{1, x, x^2, x^3\} \quad (3.22)$$

$$E_2 = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2, x^2 + x^3\} \quad (3.23)$$

$$E_3 = \{1, 1 + x, 1 + x + x^3, 1 + x + x^2, x^3, x^2 + x^3\} \quad (3.24)$$

e nós queremos descobrir qual é o conjunto gerador ótimo. Veremos, e inclusive a heurística nos ensina isto, o ótimo é relativo a conjunto de fatores. E neste caso vamos ver que existem vários geradores ótimos, mas eles terão algo em comum que chamamos *dimensão*.

3.4 O \mathbf{R}^4 tem dimensão quatro

Entendemos que o \mathbf{R}^4 é o espaço *abstrato* que serve de modelo para o espaço físico em que vivemos (o espaço-tempo). Consequentemente desejamos poder “medir” este espaço ou “registrar” posições em quatro “eventos” independentes que chamamos *largura*, *profundidade*, *altura* e *tempo* (ou outros nomes quaisquer que tenham um significado comum com estes).

Da Física nos vêm o conjunto de vetores

$$\mathcal{E} = \{e_1 = (1, 0, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0, 0), e_3 = (0, 0, 1, 0), e_4 = (0, 0, 0, 1)\}$$

que podemos mostrar que é um conjunto l.i.

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 = 0 \quad (3.25)$$

$$\lambda_1(1, 0, 0, 0) + \lambda_2(0, 1, 0, 0) + \lambda_3(0, 0, 1, 0) + \lambda_4(0, 0, 0, 1) = 0 \quad (3.26)$$

$$(\lambda_1, 0, 0, 0) + (0, \lambda_2, 0, 0) + (0, 0, \lambda_3, 0) + (0, 0, 0, \lambda_4) = 0 \quad (3.27)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0 \quad (3.28)$$

e podemos mostrar que todo elemento de \mathbf{R}^4 pode ser obtido como combinação linear dos elementos de \mathcal{E}

$$\mathbf{R}^4 \ni (a_1, a_2, a_3, a_4) = \sum_{k=1}^4 \lambda_k e_k \quad (3.29)$$

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) = (\lambda_1, 0, 0, 0) + (0, \lambda_2, 0, 0) + (0, 0, \lambda_3, 0) + (0, 0, 0, \lambda_4) \quad (3.30)$$

$$\lambda_1 = a_1; \lambda_2 = a_2; \lambda_3 = a_3; \lambda_4 = a_4 \quad (3.31)$$

Podemos também mostrar que um conjunto com mais do que quatro vetores, em \mathbf{R}^4 será l.d. Considere um conjunto formado por cinco vetores

$$v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \in \mathbf{R}^4; v_i = (v_{i1}, v_{i2}, v_{i3}, v_{i4})$$

e vamos testar a combinação linear trivial destes vetores, tomamos 5 escalares arbitrários (as variáveis deste problema)

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$$

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 + \lambda_5 v_5 = 0 \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 v_{11}, \lambda_1 v_{12}, \lambda_1 v_{13}, \lambda_1 v_{14}) + \\ & (\lambda_2 v_{21}, \lambda_2 v_{22}, \lambda_2 v_{23}, \lambda_2 v_{24}) + \\ & (\lambda_3 v_{31}, \lambda_3 v_{32}, \lambda_3 v_{33}, \lambda_3 v_{34}) + \\ & (\lambda_4 v_{41}, \lambda_4 v_{42}, \lambda_4 v_{43}, \lambda_4 v_{44}) + \\ & (\lambda_5 v_{51}, \lambda_5 v_{52}, \lambda_5 v_{53}, \lambda_5 v_{54}) = 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{11}\lambda_1 + v_{21}\lambda_2 + v_{31}\lambda_3 + v_{41}\lambda_4 + v_{51}\lambda_5 = 0 \\ v_{12}\lambda_1 + v_{22}\lambda_2 + v_{32}\lambda_3 + v_{42}\lambda_4 + v_{52}\lambda_5 = 0 \\ v_{13}\lambda_1 + v_{23}\lambda_2 + v_{33}\lambda_3 + v_{43}\lambda_4 + v_{53}\lambda_5 = 0 \\ v_{14}\lambda_1 + v_{24}\lambda_2 + v_{34}\lambda_3 + v_{44}\lambda_4 + v_{54}\lambda_5 = 0 \end{array} \right. \quad (3.34)$$

Podemos escalonar este sistema, considerando de cada uma equação e multiplicando o seu primeiro coeficiente não nulo pelas equações que fiquem abaixo, somando duas a duas e substituindo a soma por cada uma das equações. Antes vamos escrever somente a matriz do sistema (a variável não vale mesmo nada...) para economizar espaço e fazer o escalonamento apenas na matriz do sistema. Não precisamos nos preocupar com a matriz dos termos independentes (matriz dos dados) pois são todos zeros e as combinações lineares feitas com eles resultarão em outros tantos zeros. É o que acontece com sistemas homogêneos. Quando o sistema não for homogêneo temos que acoplar a matriz dos dados, uma coluna a mais, para acompanhar com ela as combinações lineares feitas com o resto da matriz, linha por linha. Este não é o caso aqui.

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} & v_{41} & v_{51} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} & v_{42} & v_{52} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} & v_{43} & v_{53} \\ v_{14} & v_{24} & v_{34} & v_{44} & v_{54} \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

Anulando o primeiro termo de todas as linhas a partir da segunda:

$$\begin{pmatrix} v_{12}v_{11} & v_{12}v_{21} & v_{12}v_{31} & v_{12}v_{41} & v_{12}v_{51} \\ -v_{12}v_{11} & -v_{22}v_{11} & -v_{32}v_{11} & -v_{42}v_{11} & -v_{52}v_{11} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} & v_{43} & v_{53} \\ v_{14} & v_{24} & v_{34} & v_{44} & v_{54} \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

com a hipótese de $v_{11} \neq 0$. Se $v_{11} = 0$ permutamos todas as colunas da matriz até encontrar um elemento diferente de zero na primeira posição. Se isto não for possível, quer dizer que $v_1 = 0$ e aí o conjunto de vetores já 'e l.d. (um conjunto de vetores contendo o zero é l.d.)

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} & v_{41} & v_{51} \\ 0 & (v_{12}v_{21} - v_{11}v_{22}) & (v_{12}v_{31} - v_{11}v_{32}) & (v_{12}v_{41} - v_{11}v_{42}) & (v_{12}v_{51} - v_{11}v_{52}) \\ 0 & (v_{13}v_{21} - v_{11}v_{23}) & (v_{13}v_{31} - v_{11}v_{33}) & (v_{13}v_{41} - v_{11}v_{43}) & (v_{13}v_{51} - v_{11}v_{53}) \\ 0 & (v_{14}v_{21} - v_{11}v_{24}) & (v_{14}v_{31} - v_{11}v_{34}) & (v_{14}v_{41} - v_{11}v_{44}) & (v_{14}v_{51} - v_{11}v_{54}) \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

Podemos renomear os coeficientes constantes da equação acima, é assim que se faz num programa de computação, e mesmo em textos de Matemática: “fazendo”

$$\begin{aligned} v_{22} &= (v_{12}v_{21} - v_{11}v_{22})v_{32} = (v_{12}v_{31} - v_{11}v_{32})v_{42} = (v_{12}v_{41} - v_{11}v_{42})v_{52} = (v_{12}v_{51} - v_{11}v_{52}) \\ v_{23} &= (v_{13}v_{21} - v_{11}v_{23})v_{33} = (v_{13}v_{31} - v_{11}v_{33})v_{43} = (v_{13}v_{41} - v_{11}v_{43})v_{53} = (v_{13}v_{51} - v_{11}v_{53}) \\ v_{24} &= (v_{14}v_{21} - v_{11}v_{24})v_{34} = (v_{14}v_{31} - v_{11}v_{34})v_{44} = (v_{14}v_{41} - v_{11}v_{44})v_{54} = (v_{14}v_{51} - v_{11}v_{54}) \end{aligned}$$

Podemos voltar a utilizar a mesma expressão simples da matriz inicial para voltar a fazer as contas (e dentro de um programa este processo de re-utilização das variáveis acontecem dentro de um laço ao fim do qual a matriz fica escalonada) veja `sistema.pas` em [13]. Teremos então

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} & v_{41} & v_{51} \\ 0 & v_{22} & v_{32} & v_{42} & v_{52} \\ 0 & v_{23} & v_{33} & v_{43} & v_{53} \\ 0 & v_{24} & v_{34} & v_{44} & v_{54} \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

e vamos aplicar a esta matriz o mesmo *processo* para anular suas entradas na segunda coluna a partir da terceira linha:

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} & v_{41} & v_{51} \\ 0 & v_{22} & v_{32} & v_{42} & v_{52} \\ 0 & 0 & v_{33} & v_{43} & v_{53} \\ 0 & 0 & v_{34} & v_{44} & v_{54} \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

à qual vamos aplicar o mesmo *processo* para anular as entradas da terceira coluna a partir da quarta linha:

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} & v_{41} & v_{51} \\ 0 & v_{22} & v_{32} & v_{42} & v_{52} \\ 0 & 0 & v_{33} & v_{43} & v_{53} \\ 0 & 0 & 0 & v_{44} & v_{54} \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

Podemos agora repor as variáveis λ_i (necessidade psicológica) para resolver o sistema. Basta fazê-lo, para os nossos propósitos, com a última equação com a qual teremos:

$$v_{44}\lambda_4 + v_{54}\lambda_5 = 0 \Rightarrow \lambda_4 = -\frac{v_{54}}{v_{44}}\lambda_5$$

se $v_{44} \neq 0$ Se $v_{44} = 0$ então $\lambda_5 = 0$ e λ_4 é qualquer, portanto não necessariamente zero, e a conclusão foi atingida, o sistema não necessariamente tem a solução única

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$$

ou ainda tem uma solução *não trivial* o que significa, pela definição de *dependência linear* que os cinco vetores no \mathbf{R}^4 são l.d. como queríamos mostrar.

A principal conclusão aqui é que o maior número de vetores l.i. no \mathbf{R}^4 é quatro, conseqüentemente qualquer conjunto de geradores deste espaço formado de vetores l.i. terá quatro vetores. É isto que caracteriza a dimensão de \mathbf{R}^4 como sendo quatro. Demonstramos assim

Teorema 14 *A dimensão do \mathbf{R}^4 A dimensão do espaço vetorial \mathbf{R}^4 sobre o corpo dos números reais, é quatro.*

Observação 7 *O padrão lico para índices de matrizes É preciso comentar que desobedecemos o padrão lico na denominação (índices) da matriz do sistema. Fomos forçados a isto pela notação dos vetores v_i . Mas sempre que possível se evita fazer isto, aqui teria tornado a notação, inútilmente, mais complicada.*

A maneira de evitar isto teria sido definir uma matriz $A = V^t$ em que $V = (v_{ij})_{ij}$. Preferimos, momentaneamente, desobedecer o padrão.

3.5 O $\mathbf{R}_3[x]$ tem dimensão quatro

Já sabemos, ver exercício (ex.4), página 79, que o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a três tem dimensão 4. Mas ainda restam alguns formalismos para serem preenchidos.

$\mathbf{R}_3[x]$ é o espaço vetorial dos polinômios com grau menor ou igual a 3. Temos que começar mostrando que $\mathbf{R}_3[x]$ é um espaço vetorial.

1. A adição obedece às regras da adição de expressões algébricas o que torna intuitivo que tem todas as propriedades que se espera para adição de números e vamos assim nos poupar de demonstrações que *parecem inúteis*. Mas o leitor desejoso de se aprofundar deve aceitar mal esta proposta e deve mostrar que $(\mathbf{R}_3[x], +)$ é um grupo comutativo.
2. A multiplicação por um escalar Quando multiplicarmos um polinômio por um escalar, a alteração se dá apenas nos coeficientes, é a regra algébrica. Vamos escrever isto formalmente:

$$\lambda a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \tag{3.41}$$

$$= \lambda a_3 x^3 + \lambda a_2 x^2 + \dots + \lambda a_1 x + \lambda a_0 \tag{3.42}$$

Conseqüentemente o grau do polinômio é mantido e portanto a multiplicação por um escalar real produz um elemento de $\mathbf{R}_3[x]$.

Na *prática* (e você vai logo ver que é muito mais do que isto), ao multiplicar o escalar λ pelo polinômio

$$a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

tudo se passa como se estivessemos multiplicando o escalar λ pela énupla

$$(a_3, a_2, a_1, a_0)$$

que é um elemento de \mathbf{R}^4 .

Consequentemente as propriedades da multiplicação (assim como as propriedades da adição) têm uma demonstração semelhante às que fizemos na página 66. Vamos rapidamente mostrar isto:

(a) Vale a associatividade à esquerda

$$\alpha(\lambda(P(x))) = (\alpha\lambda)P(x)$$

porque,

$$\alpha(\lambda P(x)) = \quad (3.43)$$

$$\alpha(\lambda(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)) = \quad (3.44)$$

$$\alpha(\lambda a_3x^3 + \lambda a_2x^2 + \lambda a_1x + \lambda a_0) = \quad (3.45)$$

$$(\alpha\lambda)a_3x^3 + (\alpha\lambda)a_2x^2 + (\alpha\lambda)a_1x + (\alpha\lambda)a_0 = \quad (3.46)$$

$$(\alpha\lambda)P(x) \quad (3.47)$$

(b) o elemento neutro da multiplicação não altera o multiplicando (não podemos dizer que ele é um elemento neutro...) porque

$$1 \cdot P(x) = 1 \cdot (a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = P(x)$$

(c) o elemento neutro da adição torna nulo o multiplicando porque todos os coeficientes são anulados.

(d) Vale a distributividade da multiplicação por um escalar relativamente à soma de vetores porque

$$P(x) = a_{31}x^3 + a_{21}x^2 + a_{11}x + a_{01} \quad (3.48)$$

$$Q(x) = a_{32}x^3 + a_{22}x^2 + a_{12}x + a_{02} \quad (3.49)$$

$$P(x) + Q(x) = \quad (3.50)$$

$$(a_{31} + a_{32})x^3 + (a_{21} + a_{22})x^2 + (a_{11} + a_{12})x + (a_{01} + a_{02}) \quad (3.51)$$

$$\lambda(P(x) + Q(x)) = \quad (3.52)$$

$$= \lambda(a_{31} + a_{32})x^3 + \quad (3.53)$$

$$+ \lambda(a_{21} + a_{22})x^2 + \quad (3.54)$$

$$+ \lambda(a_{11} + a_{12})x + \quad (3.55)$$

$$+ \lambda(a_{01} + a_{02}) = \quad (3.56)$$

$$= (\lambda a_{31} + \lambda a_{32})x^3 + \quad (3.57)$$

$$+ (\lambda a_{21} + \lambda a_{22})x^2 + \quad (3.58)$$

$$+ (\lambda a_{11} + \lambda a_{12})x + \quad (3.59)$$

$$+ (\lambda a_{01} + \lambda a_{02}) = \quad (3.60)$$

$$= (\lambda a_{31}x^3 + \lambda a_{21}x^2 + \lambda a_{11}x + \lambda a_{01}) + \quad (3.61)$$

$$+ (\lambda a_{32}x^3 + \lambda a_{22}x^2 + \lambda a_{12}x + \lambda a_{02}) = \quad (3.62)$$

$$\lambda P(x) + \lambda Q(x) \quad (3.63)$$

Provamos

Teorema 15 $\mathbf{R}_3[x]$ é um espaço vetorial

O exercício (ex.4), página 79 termina agora o nosso projeto, $\mathbf{R}_3[x]$ é um espaço vetorial de dimensão *pele menos* quatro, porque tem um conjunto linearmente independentes, com quatro vetores e cinco vetores serão linearmente dependentes.

Podemos agora definir *dimensão*.

Definição 17 *Dimensão de um espaço vetorial* A dimensão de um espaço vetorial é o número máximo de vetores linearmente independentes que é possível selecionar no espaço.

Infelizmente não podemos sempre calcular a dimensão de um espaço vetorial, o exemplo mais simples para isto é o espaço vetorial de todos os polinômios a coeficientes reais $\mathbf{R}[x]$. Vamos caracterizar isto de uma forma que não é precisa, mas é a única de que podemos lançar mão no momento:

Teorema 16 O espaço vetorial $\mathbf{R}[x]$ não é dimensão finita. **Dem**:
O conjunto de vetores

$$1, x, \dots, x^n$$

é linearmente independente, para que todo $n \in \mathbf{N}$. Consequentemente não podemos escolher um número natural como dimensão de $\mathbf{R}[x]$. **q.e.d.**

Não dissemos que a dimensão de $\mathbf{R}[x]$ é infinita porque o infinito não é singular... há vários tipos de infinito!

Laboratório 12 *dimensão*

1. Complete o conjunto

$$\mathcal{E} = \{1 + x, 1 + x^2, x^2 + x^5\}$$

para obter uma base para o espaço $\mathbf{R}_5[x]$ dos polinômios de grau menor u igual a 5.

2. Verifique se o conjunto dos polinômios de grau exatamente 5 é um espaço vetorial.

3. Verifique se o conjunto das funções reais definidas no conjunto $\{a, e, i, o, u\}$ é um espaço vetorial e encontre uma base para este espaço.

4. Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 & = 0 \\ -3x_1 - 4x_2 - 9x_3 + 2x_4 + x_5 & = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 + x_5 & = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 8x_4 + 2x_5 & = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 9x_5 & = 0 \end{cases}$$

- (a) Prove que o conjunto das soluções deste sistema de equações é um espaço vetorial.
- (b) Verifique que os “escalares” x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 combinados com os vetores-coluna, da matriz do sistema, geram o espaço solução deste sistema. Calcule a dimensão do espaço solução.
- (c) Verifique que o sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 & = b_1 \\ -3x_1 - 4x_2 - 9x_3 + 2x_4 + x_5 & = b_2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 + x_5 & = b_3 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 8x_4 + 2x_5 & = b_4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 9x_5 & = b_5 \end{cases}$$

somente pode ter solução se o vetor \vec{b} de dados pertencer ao espaço gerado pelos vetores-linha da matriz do sistema.

5. Mostre que o conjunto-solução da equação diferencial

$$y'' + a_0y' + a_1y = 0$$

é um espaço vetorial. Observe que não se lhe pede que resolva a equação.

(em outras palavras, qualquer solução do sistema é uma combinação linear de no máximo cinco escalares com os vetores-coluna da matriz do sistema).

3.6 Isomorfismo

Vamos desenvolver, nesta seção um exemplo, a semelhança entre

$$\mathbf{R}^4 \text{ e } \mathbf{R}_3[x]$$

de que já falamos algumas vezes. Vamos finalmente dizer porque e como estes dois espaços são semelhantes.

Ao longo da discussão do exemplo, iremos tirando a *teoria geral das relações de equivalência entre espaços vetoriais* o *isomorfismo*.

Finalmente vamos enunciar uma grande relação de equivalência entre os espaços que vai colocar os espaços \mathbf{R}^n como os representantes de todos eles, ou os \mathbf{C}^n se você preferir os espaços vetoriais complexos. Claro há ainda alguns que ficarão de fora, os espaços de dimensão não finita, mas esta é uma outra história, ou será outro livro...

3.6.1 O isomorfismo $\mathbf{R}^4 \equiv \mathbf{R}_3[x]$

Os espaços $\mathbf{R}^4, \mathbf{R}_3[x]$ são equivalentes, e a equivalência entre espaços vetoriais se chama *isomorfismo*:

Definição 18 *isomorfismo*

Dados dois espaços vetoriais, E, F se pudermos estabelecer entre eles uma função

$$T : E \longrightarrow F$$

que seja linear

$$T(x + y) = T(x) + T(y) ; T(\lambda x) = \lambda T(x)$$

e T seja uma bijeção, então dizemos que os espaços vetoriais E, F são isomorfos.

Observe que esta relação é *recíproca*, o que está implícito na afirmação “ E, F são isomorfos”. Quer dizer, se E é isomorfo a F então F é isomorfo a E . No âmago desta questão se encontra que T, T^{-1} são lineares. Isto precisa ser demonstrado.

Consideremos o isomorfismo

$$T : E \longrightarrow F$$

e a função inversa

$$T^{-1} : F \longrightarrow E$$

que é bijetiva.

Tome agora a combinação linear

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in F ; y_i T(x_i)$$

mas

$$T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \quad (3.64)$$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = T^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) \quad (3.65)$$

$$(3.66)$$

mostrando a linearidade de T^{-1} que é assim um isomorfismo.

Teorema 17 Propriedade I das funções lineares

Se $T : E \longrightarrow F$ for linear, então

$$T(0) = 0$$

Dem:

$$0 = 0 + 0 \Rightarrow T(0) = T(0 + 0) = T(0) + T(0)$$

o que prova que $T(0)$ é o elemento neutro da adição de vetores, o vetor zero: $T(0) = 0$

q.e.d.

A função $T : \mathbf{R}_3[x] \longrightarrow \mathbf{R}^4$ se define por

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \mapsto (a_0, a_1, a_2, a_3)$$

transformando um polinômio na matriz dos seus coeficientes.

Como a soma de polinômios se faz somando os coeficientes, então

$$T(x + y) = T(x) + T(y).$$

Como multiplicar um polinômio por um número real consiste em multiplicar cada coeficiente pelo escalar, então

$$T(\lambda x) = \lambda T(x).$$

Mostramos que a função que associa um polinômio à matriz dos seus coeficientes, na mesma ordem,

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mapsto (a_0, a_1, a_2, a_3)$$

é linear².

Falta mostrar que esta função linear é bijetiva, (injetiva e sobrejetiva). Vamos dar um salto *abstrato* e demonstrar um teorema que resolve rapidamente esta questão sempre que precisarmos dela. Continuaremos usando a notação acima, mas estaremos pensando agora em espaços E, F genéricos.

Considere dois vetores $x, y \in E$, temos

$$T(x) = T(y) \equiv T(x - y) = 0 \quad (3.67)$$

$$\text{como } T(0) = 0 \text{ então } x - y = 0 \equiv x = y \quad (3.68)$$

Demonstramos a implicação

$$T(x) = T(y) \Rightarrow x = y$$

que é equivalente a

$$x \neq y \Rightarrow T(x) \neq T(y)$$

que significa que T é injetiva. Mostramos assim o teorema

Teorema 18 *Propriedade II das funções lineares* *Critério de injetividade para funções lineares*
Uma função linear $T : E \rightarrow F$ é injetiva se e somente se $T(0) = 0$

Num dos exercícios que você já fez, chamamos a atenção para a importância da solução da equação

$$T(x) = 0$$

o “sistema de equações homogêneas”. Um dos exercícios mostrou, num caso particular, que $T(0)$ é um espaço vetorial. Vamos mostrar isto para uma *transformação linear qualquer*.

Vamos começar com uma definição:

Definição 19 *Núcleo de uma transformação linear*

Seja $T : E \rightarrow F$ uma transformação linear.

O espaço solução da equação $T(x) = 0$ se chama núcleo de T , identificado com uma das notações $Ker(T)$ ou $Nuc(T)$.

²se a ordem for permutada, ainda é linear... exercício

A adição de soluções Considere duas soluções, x_1, x_2 da equação $T(x) = 0$. Somando:

$$T(x_1) = 0 \quad (3.69)$$

$$T(x_2) = 0 \quad (3.70)$$

$$T(x_1 + x_2) = 0 \quad (3.71)$$

$$(3.72)$$

e portanto a soma de soluções é uma solução.

Propriedades da adição de soluções

1. comutatividade A adição de soluções é comutativa porque $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$ em E .
2. existência do elemento neutro pela propriedade I das funções lineares (Teorema 17).
3. existência do inverso aditivo Considere uma solução x . Para qualquer escalar λ temos

$$T(\lambda x) = \lambda T(x)$$

e portanto, quando $\lambda = -1$ teremos

$$T(-x) = T(-1x) = -1T(x) = -10 = 0$$

e assim se $x \in \text{Ker}(T)$ então $-x \in \text{Ker}(T)$.

4. associatividade da adição A adição é associativa é associativa em E logo tem que sê-lo em um seu subconjunto $\text{Ker}(T)$.

Mostramos assim que $(\text{Ker}(T), +)$ é um grupo comutativo.

Multiplicação por um escalar

Já mostramos que, logo acima, que se $T(x) = 0$

$$T(\lambda x) = \lambda T(x) = \lambda 0 = 0$$

portanto o $\text{Ker}(T)$ é estável frente a multiplicações por escalares. Vejamos as propriedades desta multiplicação:

1. A associatividade à esquerda vale em $\text{Ker}(T)$ porque vale em E de quem $\text{Ker}(T)$ é subconjunto.
2. o elemento neutro da multiplicação não altera o multiplicando, vale em $\text{Ker}(T)$ porque vale em E de quem $\text{Ker}(T)$ é subconjunto.
3. o elemento neutro da adição torna nulo o multiplicando vale em $\text{Ker}(T)$ porque vale em E de quem $\text{Ker}(T)$ é subconjunto.
4. a distributividade da multiplicação por um escalar relativamente à soma de vetores é a própria linearidade de T .

Mostramos assim que

Teorema 19 *Propriedade III das funções lineares*

Seja $T : E \rightarrow F$ uma transformação linear, então $\text{Ker}(T)$ é um espaço vetorial.

Podemos reformular a *propriedade II das funções lineares* dizendo

Teorema 20 *Núcleo de transformações lineares injetivas*

Se $T : E \rightarrow F$ for uma transformação linear injetiva, então $\text{Ker}(T) = \{0\}$ é o espaço vetorial trivial.

Retornando ao nosso projeto, a equivalência entre os espaços \mathbf{R}^4 e $\mathbf{R}_3[x]$, vemos que transformação inversa

$$(0, 0, 0, 0) \mapsto 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 = 0$$

quer dizer que $\text{Ker}(T) = 0$ portanto, injetiva, e identificamos $\mathbf{R}_3[x]$ com um subconjunto do espaço vetorial \mathbf{R}^4 .

Precisamos mostrar que T é sobrejetiva. Tome uma éupla $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbf{R}^4$ a ela corresponde a imagem inversa $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ portanto T é bijetiva. Demonstramos que

Teorema 21 $\mathbf{R}_3[x]$ e \mathbf{R}^4 são isomorfos

As contas para provar que

Teorema 22 $\mathbf{R}_{n-1}[x]$ e \mathbf{R}^n são isomorfos

são absolutamente semelhantes as que fizemos acima. É um exercício instrutivo faê-las detalhadamente porque obrigará o estudante a treinar redação matemática e escrever notações adequadas para fazer a adaptação do que escrevemos, para o novo caso.

3.6.2 \mathbf{R}^n - o paradigma da dimensão finita

Na solução dos exercícios da seção anterior, que o leitor poderá encontrar na seção final deste capítulo, usamos com frequência a identificação de espaços com o eapaço \mathbf{R}^n .

Vamos desenvolver agora a demonstração de que os espaços \mathbf{R}^n ; $n \in \mathbf{N}$ servem de representantes para qualquer espaço vetorial de dimensão finita.

Considere um *espaço vetorial abstrato* E de dimensão finita. Dizer que E tem dimensão n significa que podemos encontrar *exatamente* n vetores linearmente independentes em E formando um conjunto de geradores, uma base para E .

Selecionemos um tal conjunto

$$\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$$

Dizer que \mathcal{E} gera E significa que dado $x \in E$ podemos encontrar *exatamente* n escalares

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$$

⁴ tal que

$$x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k.$$

Se a seleção dos vetores que gera E não é única, já vimos diversos exemplos disto, entretanto, quando selecionarmos um conjunto de geradores, relativamente a este conjunto de geradores, a coleção de escalares é única. Suponha que não seja assim, que possamos escolher duas coleções de escalares

$$\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{13}, \dots, \lambda_{1n}$$

e

$$\lambda_{21}, \lambda_{22}, \lambda_{23}, \dots, \lambda_{2n}$$

tal que

$$x = \sum_{k=1}^n \lambda_{1k} e_k = \sum_{k=1}^n \lambda_{2k} e_k$$

então podemos subtrair as duas somas tendo

$$\sum_{k=1}^n (\lambda_{1k} - \lambda_{2k}) e_k = 0$$

e como os vetores $e_k, k \in \{1, \dots, n\}$ são l.i. então

$$(\lambda_{1k} - \lambda_{2k}) = 0 \equiv \lambda_{1k} = \lambda_{2k}$$

é uma única coleção de escalares. Demonstramos o

Teorema 23 *Unicidade da combinação linear Dada uma base*

$$\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\} = (e_k)_{k=1 \dots n}$$

para o espaço vetorial E , existe uma única coleção de escalares

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n$$

tal que

$$x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k.$$

Esta única coleção de escalares cuja combinação linear representa x em E é chamada de coordenadas de x relativamente a base

$$\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\} = (e_k)_{k=1 \dots n}$$

³observe um defeito de notação, n pode ser 1, corrija os autores

⁴mesmo erro...

Não poderia ser diferente disto, escolhido um *referencial*, uma base para o espaço, as coordenadas de qualquer vetor, relativamente a este *referencial*, são únicas.

Estamos em condições de encerrar o nosso projeto:

- Dado um espaço vetorial E de dimensão n ;
- fixada uma base $(e_k)_{k=1\dots n}$ para este espaço;
- Podemos associar de forma única a cada $x \in E$ uma coleção de escalares

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n = (\lambda_k)_{k=1\dots n}$$

a menos de alguma permutação do conjunto dos escalares.

- Fica assim definida pelo menos uma transformação linear

$$E \xrightarrow{T} \mathbf{R}^n; \tag{3.73}$$

$$E \ni x \mapsto T(x) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n \tag{3.74}$$

garantida pela unicidade das coordenadas de x relativamente à base escolhida.

Temos que provar que esta transformação é linear e bijetiva, portanto um **isomorfismo** de espaços vetoriais.

- A linearidade

Tome $x_1, x_2 \in E$. A cada um deles corresponde uma énupla de coordenadas,

$$T(x_1) = (x_{11}, \dots, x_{1n}), T(x_2) = (x_{21}, \dots, x_{2n})$$

Se somarmos as combinações lineares que representa cada um deles em E teremos

$$T(x_1 + x_2) = (x_{11} + x_{21}, \dots, x_{1n} + x_{2n}) = \tag{3.75}$$

$$= (x_{11}, \dots, x_{1n}) + (x_{21}, \dots, x_{2n}) = T(x_1) + T(x_2) \tag{3.76}$$

Tome agora $x \in E, \lambda \in \mathbf{R}$ teremos

$$T(\lambda x) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \tag{3.77}$$

$$= \lambda(x_1, \dots, x_n) = \lambda T(x) \tag{3.78}$$

- injetividade Considere o $Ker(T)$ a imagem inversa de um conjunto de coordenadas nulas

$$(0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^n$$

a ela corresponde uma combinação linear nula, logo o vetor zero de E . Portanto $Ker(T) = \{0\}$ e T é injetiva.

- bijetividade Considere um conjunto de coordenadas

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$$

a combinação linear

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$$

representa um único elemento $x \in E$ que é a imagem inversa deste conjunto de coordenadas por T que é assim sobrejetiva.

Provamos assim que

Teorema 24 *Isomorfismo de espaços de dimensão n* Qualquer espaço vetorial de dimensão n é isomorfo ao espaço \mathbf{R}^n .

Observação 8 *Não unicidade dos isomorfismos* Uma simples permutação da ordem dos vetores da base altera a definição do isomorfismo

$$E \xrightarrow{T} \mathbf{R}^n$$

Isto mostra que o isomorfismo entre dois espaços não é 'único.

Queremos ir além um pouquinho. Dados dois espaços vetoriais de dimensão n , não somente eles são isomorfos com \mathbf{R}^n , mas entre si.

Para vê-lo, considere dois espaços vetoriais E, F de dimensão n e os isomorfismos

$$E \xrightarrow{T_1} \mathbf{R}^n, F \xrightarrow{T_2} \mathbf{R}^n$$

Como T_2 é bijetiva, logo inversível, temos

$$E \xrightarrow{T_1} \mathbf{R}^n \xrightarrow{T_2} F \quad (3.79)$$

$$E \xrightarrow{T_2 \circ T_1} F \quad (3.80)$$

$$(3.81)$$

e nos queremos provar que a composta $T_2 \circ T_1$ é linear.

Considere

$$x_1, x_2, \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in E \quad (3.82)$$

$$T_1(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \quad (3.83)$$

$$\lambda_1 T_1(x_1) + \lambda_2 T_1(x_2) \quad (3.84)$$

$$T_2(\lambda_1 T_1(x_1) + \lambda_2 T_1(x_2)) = \lambda_1 T_2(T_1(x_1)) + \lambda_2 T_2(T_1(x_2)) \quad (3.85)$$

$$T_2 \circ T_1(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 T_2 \circ T_1(x_1) + \lambda_2 T_2 \circ T_1(x_2) \quad (3.86)$$

Assim $T_2 \circ T_1$ é linear, bijetiva portanto um isomorfismo e E, F são isomorfos.

Teorema 25 *Isomorfismo de espaços de dimensão n* II *Quaisquer espaços vetoriais de dimensão n são isomorfos entre si.*

Isto torna a relação *isomorfismo* uma relação de equivalência entre os espaços vetoriais. Vamos denotar o isomorfismo entre dois espaços vetoriais com o símbolo \approx , temos então:

- reflexividade A transformação linear identidade é um isomorfismo:

$$E \approx E$$

- simetria

$$E \approx F \equiv F \approx E$$

- transitividade

$$E \approx F \text{ e } F \approx G \Rightarrow E \approx G$$

3.7 Morfismos de espaços vetoriais

Também chamados por alguns autores, de *homomorfismos* de espaços vetoriais.

Os isomorfismos são muito *radicais*, e a *radicalização* parece ser um defeito, hoje em dia. Vamos considerar uma forma mais amena de relação entre os espaços, os *morfismos*.

Para ter um morfismo entre dois espaços vetoriais, basta ter uma transformação linear entre eles. Você pode dizer que estamos apenas trocando o nome das transformações lineares, dizendo que agora as chamaremos de *morfismos*. É verdade.

Observação 9 *Morfismos*

É verdade que estamos criando um conceito aparentemente gratuito, mas é possível ver de uma forma mais ampla, que englobe diversas estruturas matemáticas, os tipos de funções que operam entre duas estruturas preservando as propriedades básicas das estruturas, como é o caso das transformações lineares que preservam a linearidade entre espaços vetoriais. Um outro exemplo disto são as funções contínuas, que preservam as propriedades básicas dos espaços de funções contínuas e são assim um tipo morfismo dos espaços topológicos que é a estrutura natural onde se pode definir continuidade.

Podemos dizer que Matemática é uma teoria de modelos, que criamos, em Matemática estruturas compostas de objetos e dos morfismos entre eles. Apenas para que você compreenda que esta não é uma generalização gratuita, as estruturas computacionais modernas vem se beneficiando fortemente desta forma descrever as relações entre os objetos.

Exercícios 5 *Dimensão*

1. interseção reta plano

- (a) *Descreva as possíveis interseções entre uma reta e um plano*
- (b) *Justifique por que, se a interseção de uma reta com um plano tiver dois pontos distintos, então a reta está contida no plano (é um subespaço do plano).*
- (c) *Justifique por que a dimensão máxima da interseção de uma reta com um plano, se a reta não for um subespaço⁵ do plano, é zero.*
- (d) *Justifique que se uma reta tiver interseção vazia com um plano, uma reta perpendicular a ela intercepta o plano em exatamente um ponto.*

2. interseção reta⁶ e espaço

Generalizar a questão anterior discutindo as possibilidades de interseção de uma reta com um espaço tridimensional.

3.8 Dimensão e variedade

Falando de uma forma imprecisa, mas que expressa o fundamental, dizemos que se uma equação tiver apenas uma “variável livre” ela representa uma curva. Se tiver duas “variáveis livres”, representa uma superfície...

Vejamos um exemplo.

Exemplo 10 *Variável livre*

Considere a equação $w = F(x, y, z)$, uma função de tres variáveis.

Dizemos que w é uma variável dependente porque seus valores são deduzidos dos valores que dermos a cada uma das variáveis x, y, z . Consequentemente as variáveis x, y, z se chamam livres porque a elas podemos associar, arbitrariamente valores. Observe que este conceitos são difusos porque podemos intercambiar a posição das variáveis e, conseqüentemente, considerar outra das variáveis como dependente...

O que interessa aqui é a “quantidade de variáveis livres”, três.

Por exemplo, poderíamos calcular, se o ponto $(-3, 0, 2)$ estiver no domínio de F , usando um pacote computacional, scilab, por exemplo, que é software livre,

$$F(x, y, z) = x^3 + 3x^2y - 4xy^2 + y^5 \tag{3.87}$$

$$w(-3, 0, 2) = F(-3, 0, 2) ; x = -3; y = 0; z = 2 \tag{3.88}$$

$$w = F(-3, 0, 2) = -27 \tag{3.89}$$

Com a mesma forma de pensar, dizemos que as variáveis x, y, z são livres porque atribuímos valores de nossa escolha para estas variáveis e assim calculamos o valor de w associado.

Considere agora a equação $F(x, y, z) = 0$.

⁵o vazio não é um espaço vetorial...

Pelo Teorema da Função Implícita⁷ podemos escrever

$$x = f_1(y, z); \quad y = f_2(x, z); \quad z = f_3(x, y),$$

sob certas condições. Isto mostra, usando o mesmo raciocínio anterior, que em $F(x, y, z) = 0$ existem duas variáveis livres. Portanto

$$F(x, y, z) = 0$$

representa uma superfície, um objeto de dimensão 2, enquanto que

$$w = F(x, y, z)$$

representa um objeto de dimensão 3.

Observe que você pode substituir o zero por qualquer constante. Ao fazermos

$$w = c$$

eliminamos uma variável, o que pode também ser feito com qualquer das outras variáveis na expressão. Veja também que se

$$F(x, y, z) = 0$$

é de dimensão 2, uma superfície, então caberia perguntar o que é

$$w = F(x, y, z)$$

tanto do ponto de vista de dimensão, como do ponto de vista geométrico. Diremos logo que é de dimensão 3 e que lhe daremos o nome de hipersuperfície. É o método subversivo que adotamos, espalhando as idéias sem discutí-las, para que você se acostume com elas.

O que se encontra por trás do número de variáveis é o conceito de “dimensão” e uma outra forma de expressar o conteúdo do parágrafo anterior consiste em dizer-se que *curvas* são *variedades* de dimensão 1, *superfícies* são *variedades* de dimensão dois, e que $w = F(x, y, z)$ representa uma *variedade* de dimensão três.

A dimensão é o número de variáveis menos um.

Acabamos de introduzir dois novos conceitos, por comparação: *variedade*, *hipersuperfície*.

Curvas, retas, planos, superfícies, são *variedades*. A palavra *variedade* vai nos libertar da prisão dimensional em que a nossa intuição geométrica nos acorrenta e que linguagem que falamos reflete.

Vamos “definir”, informalmente, *variedade*. Que o leitor seja crítico e veja aqui uma falha na axiomática.

⁷veja no índice remissivo onde se encontra este teorema e o leia agora!

Definição 20 *Variedade* O conceito de variedade nos libera da prisão tridimensional da língua que falamos. Uma variedade é um “objeto geométrico” do espaço. O gráfico de uma função

$$\{(x, y); y = f(x) ; \mathbf{R}^n \xrightarrow{f} \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^{n+1}$$

é uma variedade, também designada pelo nome de hipersuperfície do \mathbf{R}^{n+1} .

As variedades são portanto, as superfícies, os planos, as retas, as curvas, os gráficos de funções, os pontos. Distinguimos dois tipos de variedades: as variedades lineares, retas, planos enfim todas cuja equação seja uma combinação linear de “coeficientes” com “variáveis” que representam as coordenadas dos pontos do espaço e as outras, as variedades não lineares. Mais a frente falaremos de uma outra classificação.

- As variedades lineares são os gráficos de funções lineares que se podem expressar matricialmente como

$$\mathbf{R}^n \ni x \mapsto y = Tx.$$

- Os hiperplanos são as variedades lineares de dimensão máxima, imediatamente inferior a do espaço que estivermos considerando.
- As hipersuperfícies são as variedades (não necessariamente lineares) de dimensão máxima, imediatamente inferior a do espaço que estivermos considerando.

Exemplo 11 Variedade e dimensão

- Sabemos o que são pontos, apesar de que nunca tenhamos visto nenhum. São as variedades de dimensão zero. São os hiperplanos de \mathbf{R} e também são as hipersuperfícies deste espaço. Neste nível não distinguimos os tipos de variedade...
- O próximo item na hierarquia dimensional, são as variedades de dimensão 1, as curvas. As retas são variedades lineares de dimensão 1. Uma circunferência não é uma variedade linear, é uma variedade não linear de dimensão 1. As “retas” são os hiperplanos do \mathbf{R}^2 , são também hipersuperfícies deste espaço. As curvas são as hipersuperfícies do \mathbf{R}^2 .
- Seguindo para uma dimensão maior temos as superfícies, as variedades de dimensão dois. Planos são variedades lineares de dimensão dois. É um tipo de superfície. Tem superfícies que não são planas, não são variedades lineares, são variedades de dimensão dois. Os “planos” são os hiperplanos do \mathbf{R}^3 , as superfícies são as hipersuperfícies do \mathbf{R}^3 .
- Depois temos as variedades de dimensão 3, o espaço em que vivemos é uma variedade linear de dimensão 3. O globo terrestre, a Lua, os planetas, são variedades não lineares de dimensão 3. Uma variedade linear de dimensão três é um hiperplano do \mathbf{R}^3 .

- *Nós vivemos na superfície terrestre, um exemplo de variedade não linear de dimensão dois. O globo terrestre, com o seu interior, é um exemplo de variedade não linear de dimensão três.*
- *As hipersuperfícies são as variedades de dimensão máxima, imediatamente inferior a do espaço que estivermos considerando. Assim*
 - *as "retas" são as hipersuperfícies do \mathbf{R}^2 , como os círculos, as parábolas, as elipses. Enfim as curvas são as hipersuperfícies do \mathbf{R}^2 .*
 - *os "planos", a fronteira das esferas, as faces de um cubo, os parabolóides hiperbólicos (sela do macaco), são hipersuperfícies do \mathbf{R}^3 .*
 - *Uma variedade de dimensão 3 contida no \mathbf{R}^4 é uma hipersuperfície deste espaço.*
 - *Uma variedade de dimensão $n - 1$ contida no \mathbf{R}^n é uma hipersuperfície deste espaço.*

Os dois conceitos, *hiperplanos*, *hipersuperfícies* são conceitos relativos. Não podemos falar de hiperplanos sem mencionar qual é o espaço em que os consideramos. O mesmo se diga das hipersuperfícies.

3.8.1 Hiperplano e hipersuperfície no \mathbf{R}^4

Mas podemos nos colocar em dimensão ainda mais elevada, o \mathbf{R}^4 é um espaço de dimensão 4, porque os seus elementos se expressam usando *quatro variáveis livres*

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

todas de sua livre escolha. O espaço em que vivemos é uma *variedade linear*, um *hiperplano* do \mathbf{R}^4 . O globo terrestre e os planetas são *hipersuperfícies* do \mathbf{R}^4 .

- hiperplano Uma variedade linear de dimensão 3 é um hiperplano do \mathbf{R}^4 . Quer dizer que o \mathbf{R}^3 é um hiperplano do \mathbf{R}^4 . Qualquer translação $\mathbf{R}^3 + \vec{r}$ é um hiperplano do \mathbf{R}^4 . Nos vivemos num hiperplano do \mathbf{R}^4 a bordo de uma hipersuperfície do \mathbf{R}^3 .
- hipersuperfície Uma variedade não linear de dimensão 3 é um hipersuperfície do \mathbf{R}^4 . A Terra por exemplo, não a superfície em que vivemos, mas o globo terrestre todo, é uma hipersuperfície do \mathbf{R}^4 .

3.8.2 Um pouco sobre classificação de variedades

Nem toda variedade tem uma equação explícita, porém, e isto é consequência do Teorema da Função Implícita, que todas as variedades tem uma equação.

O tipo de equação de uma variedade serve para classificá-la:

- Variedades algébricas são aquelas que tem uma equação polinomial; Vamos incluir neste caso uma variedade que seja definida por um programa em uma linguagem de alto nível.
- Variedades não algébricas quando a equação que as definem tem expressões transcendentais.
- Gráficos de funções quando tivermos uma função

$$\mathbf{R}^n \supset W \xrightarrow{f} V \subset \mathbf{R}^m$$

então $\text{graf}(f)$ será

- uma *variedade* algébrica, se f for uma expressão polinomial;
 - uma *variedade* não algébrica, se f for uma expressão não polinomial, contiver funções transcendentais em sua fórmula.
- Variedades Diferenciáveis são aquelas cuja expressão que as definem são diferenciáveis. As variedades algébricas são diferenciáveis, por exemplo.

Definição 21 *Variedades tangentes*

Sejam duas funções f, g

$$W \xrightarrow{f, g} V$$

e as correspondentes variedades, do tipo “gráfico de função”, $\text{graf}(f), \text{graf}(g)$.

Diremos que as duas variedades $\text{graf}(f), \text{graf}(g)$ são tangentes no ponto $(a, b) \in W \times V$ se houver uma vizinhança $D(a, r) \subset W$ tal que

$$\begin{cases} f(a) = g(a) & = b \\ f(a+h) - g(a+h) & = o(|h|) ; |h| < r \end{cases} \quad (3.90)$$

Definição 22 *função diferenciável* Considere $W \xrightarrow{f} V$ uma função contínua definida num aberto $W \subset \mathbf{R}^n$ e tomando valores em outro aberto $V \subset \mathbf{R}^m$. Diremos que f é diferenciável no ponto $a \in W$ se houver uma função linear T tal que $\text{graf}(f), \text{graf}(T)$ são tangentes no ponto \underline{a} .

$$f(a+h) - f(a) - T(h) = o(|h|)$$

Definição 23 *dimensão de uma variedade linear*

As variedades lineares são as variedades da forma $\text{graf}(T)$ em que T é uma função linear afim.

Podemos definir de forma natural a dimensão das variedades lineares porque o gráfico $\text{graf}(T)$ é um espaço vetorial (afim), então a dimensão de $\text{graf}(T)$ é a dimensão do espaço vetorial afim $\text{graf}(T)$.

Considere uma variedade Ω e uma vizinhança aberta de um ponto $a \in \Omega$. Se houver uma variedade linear $\text{graf}(T)$ tangente a Ω no ponto \underline{a} , então diremos que a dimensão local da variedade Ω em a é a $\dim(\text{graf}(T))$.

Exemplo 12 *Variedades com componentes de dimensão variada*

Observe que a definição acima admite a possibilidade de que uma variedade seja composta de componentes-variedades com dimensões distintas. Por exemplo, uma reta e um ponto que não pertença a esta reta formam uma variedade que tem uma componente de dimensão zero e outra componente de dimensão 1.

Observação 10 *Gráfico e outros conceitos indefinidos*

Observe que precisamos do conceito de dimensão local para variedades que não sejam lineares. As variedades lineares terão a mesma dimensão em qualquer de seus pontos, porque são espaços vetoriais afins. Mas as variedades não lineares podem ser aglomerados os mais estranhos de sub-variedades com dimensões locais distintas. Considere “Saturno e seus anéis”, supondo que os anéis sejam de dimensão dois e Saturno de dimensão três, obviamente, estamos dentro de um exemplo forçado uma vez que nenhuma variedade do espaço x tempo em que vivemos tem dimensão diferente de três....

Não definimos gráfico, este conceito fica entre os muitos que iremos usar implicitamente sem alertar o leitor para isto, afim de não tornar enfadonha a leitura.

Vejamos de imediato qual a relação que pode haver com distintas funções lineares T_1, T_2 que sejam tangentes ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$.

$$f(a+h) - f(a) - T_1(h) = o(|h|) \quad (3.91)$$

$$f(a+h) - f(a) - T_2(h) = o(|h|) \quad (3.92)$$

$$T_1(h) - T_2(h) = o(|h|) \quad (3.93)$$

$$(T_1 - T_2)(h) = o(|h|) \quad (3.94)$$

porque “também” a variável é linear relativamente às funções lineares... e como $S = T_1 - T_2$ é uma função linear, temos

$$S(h) = o(|h|)$$

mas a única função linear que tem esta propriedade é a função identicamente nula, logo

$$T_1 = T_2$$

e concluímos

Teorema 26 *Unicidade da derivada*

Se f for diferenciável, a função linear tangente é única.

Neste momento é interessante fixarmos uma base para o espaço vetorial. Como não precisaremos de mudar o referencial, vamos usar a base usual

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 0, 1).$$

Consequentemente, a cada *transformação linear* lhe corresponde uma única matriz.

Considere agora uma função

$$\mathbf{R}^n \supset \Omega : \xrightarrow{f} \mathbf{R}^m$$

e um ponto $a \in \Omega = \text{Dom}_f$. A derivada, $J(f)$, calculada em \underline{a} é uma função linear cujo gráfico é tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$. Seja T a matriz desta transformação linear

Como

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = J(f)(a) \implies \quad (3.95)$$

$$\frac{\partial T}{\partial e_i} = (a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}) \quad (3.96)$$

a derivada na direção de e_i . Observando que esta é também a derivada de f na direção de e_i , podemos concluir que

$$\frac{\partial}{\partial e_i} \frac{\partial f}{\partial e_j} \Big|_a = \frac{\partial}{\partial e_i} \frac{\partial T}{\partial e_j} \Big|_a = a_{ij} = \frac{\partial}{\partial e_j} \frac{\partial T}{\partial e_i} \Big|_a = a_{ji} = \frac{\partial}{\partial e_j} \frac{\partial T}{\partial e_i} \Big|_a = \frac{\partial}{\partial e_j} \frac{\partial f}{\partial e_i}$$

Assim, se f for derivável, (tiver uma variedade linear tangente ao seu gráfico), então

Teorema 27 *Teorema de Schwartz*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial e_i \partial e_j} = \frac{\partial}{\partial e_i} \frac{\partial f}{\partial e_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial e_j \partial e_i} = \frac{\partial}{\partial e_j} \frac{\partial f}{\partial e_i}$$

As derivadas parciais de ordem 2, mistas, são iguais.

Devido a erros de concepção os que nos antecederam chamaram T de jacobiana de f no ponto a , $J(f)(a)$, em vez de chamá-la simplesmente de *derivada de f* . Continuaremos com a notação histórica mas corrigindo a idéia.

Observação 11 *A notação $J(f)(a)$*

A matriz jacobiana é uma matriz funcional, uma função de \underline{n} variáveis no contexto destas notas. Consequentemente tem sentido escrevermos o seu valor no ponto $a \in \mathbf{R}^n$ identicando assim uma matriz que foi obtida ao substituirmos cada uma das variáveis pelas coordenadas de \underline{a} .

Capítulo 4

Sistemas de equações lineares II

O *teorema* deste capítulo se chama *teorema da imagem e do núcleo* e ele descreve como é a solução de uma sistema de equações lineares.

Este teorema nos diz tudo a respeito do *tamanho* do espaço-solução de uma equação linear.

Mais a frente no capítulo vamos estudar como é que se resolve uma equação linear, o problema é que nem sempre sabemos fazer as contas... Se o sistema for muito grande o tempo de computação pode ser proibitivo, isto para não considerar a precisão que se perde.

Portanto, para calcular mesmo, nos encontramos em franca área de pesquisa algorítmica na qual não vamos entrar neste livro, veja [?] e a bibliografia alí citada.

4.1 O Teorema da imagem e do núcleo

Vimos no (ex. 4), página 86 que as colunas de uma matriz geram a imagem da função linear que esta matriz representa. Se a matriz for quadrada podemos rapidamente deduzir daí a dimensão do núcleo e conseqüentemente ter uma idéia muito precisa de como são as soluções do sistema linear que esta matriz representa, é o que nos diz o *teorema da imagem e do núcleo*.

4.1.1 A imagem de uma matriz como função linear

Ao considerarmos um sistema como

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

temos:

- Uma função linear

$$\mathbf{R}^n \xrightarrow{T} \mathbf{R}^n.$$

- Uma família de vetores, $a_1 \cdots a_n$, as colunas da matriz, linearmente combinados com os escalares $x_1 \cdots x_n$

$$x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n = b$$

gerando $Im(T)$, a imagem de T .

- Se os vetores a_i não forem *l.i.* então este conjunto de vetores pode ser *simplificado* com a retirada de alguns que são combinação linear de outros, tornando o conjunto de vetores-linha (ou o conjunto dos vetores-coluna) um *conjunto linearmente independente*, Consequentemente a dimensão da imagem de T é menor que n .
- Uma consequência disto é que as linhas desta matriz também são *l.d.*, porque o determinante da matriz é zero, o $Ker(T)$ não é trivial, tem dimensão diferente de zero.
- Inversamente, se os vetores a_i forem *l.i.* então a dimensão do espaço $Im(T)$ é n o que significa que o determinante da matriz não é nulo, portanto o espaço $Ker(T) = \{0\}$, cuja dimensão é zero. Neste último caso temos a equação

$$dim(Ker(T)) + dim(Im(T)) = 0 + n = n$$

que desejamos generalizar:

- Vemos que,
 - se a dimensão do núcleo crescer, a dimensão da imagem decrece ;
 - reciprocamente, se a dimensão do núcleo decrecer, a dimensão da imagem cresce.

Esta relação é de grande importância para entender a estrutura da solução dos sistemas lineares. Vamos fazer algumas definições para melhorá-la.

Definição 24 *Posto e liberdade*

Considere, como acima, que uma função linear T esteja definida por uma matriz.

- $dim(Ker(T))$ é chamada de liberdade do sistema de equações $T(\vec{x}) = \vec{b}$.
- $dim(Im(T))$ é chamada de posto do sistema de equações (ou da matriz)

Estamos aqui sugerindo que transformações lineares sejam sempre definidas por matrizes. Em alguns dos exercícios, ao final deste capítulo, você irá ver que isto é falso. Mas, uma matriz sempre define uma transformação linear.

Não é usual falarmos da *liberdade* de uma matriz, porque *posto* e *liberdade* estando conectados por uma equação, podemos deduzir a *liberdade* do *posto*. Em geral fala-se apenas do *posto*¹ de uma matriz.

Observação 12 *O significado da liberdade*

Se $\dim(\text{Ker}(T)) \neq 0$ então há muitas soluções possíveis.

A palavra “muitas” tem pouco sentido² uma vez que muitas são as soluções apenas se $\dim(\text{Ker}(T)) \neq 0$. É preciso caracterizar melhor a amplidão do conjunto das soluções, usando o conceito de dimensão porque

$$\dim(\text{Ker}(T)) = 1, \dim(\text{Ker}(T)) = 2$$

são distintos graus de liberdade, ambos com muitas soluções, uma infinidade delas.

- liberdade = 0, quando a $\dim(\text{Ker}(T)) = 0$, neste caso a solução, se houver, é um **ponto**, é *única*.
- liberdade = 1, quando a $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$, e se houver solução, então o espaço solução é uma **reta**, qualquer solução é múltipla de uma solução particular $x_0 \neq 0$. **Todas as soluções se encontram sobre a mesma direção.**
- liberdade = 2, quando a $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$, e se houver solução, então o espaço solução é um **plano**, e, conseqüentemente, as soluções passam a ser geradas por duas soluções l.i.: **há soluções em várias direções.**
- liberdade = 3, quando a $\dim(\text{Ker}(T)) = 3$, e se houver solução, então o espaço solução é um **espaço 3D**, e, conseqüentemente, as soluções passam a ser geradas por três soluções l.i.: **há soluções em várias dimensões.**

<i>liberdade é a <u>dimensão</u> da solução.</i>
--

Liberdade e Posto

Há autores que propõem, simplesmente, a eliminação do conceito de *determinante*. Eles têm razão num ponto, o determinante é difícil de ser calculado, deixando de ser prático. Nós consideramos o determinante um instrumento teórico, não prático. Quando falarmos do *determinante* não pretendemos calculá-lo diretamente.

Para encontrar *liberdade* de uma matriz (ou de um sistema de equações associado a uma matriz) procuramos o maior subdeterminante não nulo desta matriz.

¹Não é atoa que a ‘liberdade’ depende diretamente do ‘posto’.

²estamos fazendo referência à cardinalidade, se houver mais de uma solução a “quantidade” (cardinalidade) delas é a mesma, *muitas*, portanto o adjetivo *muito* é vazio de sentido, dimensão é que conta.

Vamos começar pensando numa matriz quadrada \mathcal{A} cujo determinante seja zero. Isto significa que existe pelo menos uma linha desta matriz que pode ser escrita como combinação linear das outras e portanto esta linha pode ser anulada.

Método prático:

- *triangularize superiormente a matriz*, anule todas as entradas abaixo da diagonal principal, e você vai encontrar todas as linhas que podem ser anuladas e assim calcular a liberdade da matriz: o número de linhas nulas, é a dimensão do núcleo.
- Ao mesmo tempo o complementar (o número de linhas complementar) é a dimensão da imagem.

Com esta notação, ou terminologia, vamos enunciar o resultado,

Teorema 28 *Teorema do núcleo e da imagem*

Se $\mathbf{R}^n \xrightarrow{T} \mathbf{R}^n$ for uma função linear, então

$$\dim(\text{Im}(T)) + \dim(\text{Ker}(T)) = n = \text{posto}(T) + \text{liberdade}(T)$$

Dem:

Considere a matriz \mathcal{A} e a transformação linear que ela representa $\mathbf{R}^n \xrightarrow{T} \mathbf{R}^n$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}x_2 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}x_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2}x_2 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \equiv \quad (4.2)$$

$$x_1a_1 + \cdots + x_na_n = b \quad (4.3)$$

que já interpretamos como sendo os vetores $a_1 \cdots a_n$ expandindo a imagem, $\text{Im}(T)$. O número máxima de vetores l.i. deste conjunto é o $\text{posto}(\mathcal{A})$ **q.e.d.**

Laboratório 13 *Posto e liberdade*

1. Calcule posto e liberdade das matrizes Use octave para verificar suas respostas.

$$\begin{array}{ll}
a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} & b) \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
c) \begin{pmatrix} \cos(2) & -\sin(2) & 0 \\ \sin(2) & \cos(2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & d) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
e) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} & f) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
g) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & h) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\
i) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} & j) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\
k) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & -1 \end{pmatrix} & l) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}
\end{array}$$

2. Para cada uma das matrizes, A , no exercício anterior, resolva o sistema de equações

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

considerando os vetores de dados:

$$\begin{array}{llll}
a) \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} & b) \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} & c) \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} & d) \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \\
e) \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} & f) \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} & g) \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & h) \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\
i) \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} & j) \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} & k) \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} & l) \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}
\end{array}$$

3. Prove que a translação de uma reta por um ponto (vetor) é uma reta.

4. Considere r , uma reta, e $x_0 \in r$ um ponto escolhido sobre a mesma. Se $x \in r$ representar um ponto arbitrário sobre a reta, verifique que o conjunto

$$\{x - x_0 ; x_0 \in r\}$$

é uma reta paralela à reta r passando pela origem.

5. Prove que a translação de um plano por um ponto (vetor) é um plano.
6. Considere Π um plano e $x_0 \in \Pi$ um ponto escolhido sobre o mesmo. Se $x \in \Pi$ representar um ponto arbitrário sobre o plano, verifique que o conjunto

$$\{x - x_0 ; x_0 \in \Pi\}$$

é um plano paralelo ao plano Π passando pela origem.

7. Encontre as translações $r + \vec{u}$ em que r é a reta cuja equação se encontra abaixo e o vetor \vec{u} se encontra indicado junto com a equação:

$$\begin{array}{ll} a) 3x + 4y = 0 ; \vec{u} = (1, 2) & b) 3x + 4y = 0 ; \vec{u} = (-4, 3) \\ c) (t, 2t, 3t) ; \vec{u} = (2, 3, 4) & d) (t, 2t, 3t) ; \vec{u} = (2, 4, 6) \end{array}$$

8. Encontre as translações $\Pi + \vec{u}$ em que Π é o plano cuja equação se encontra abaixo e o vetor \vec{u} se encontra indicado junto com a equação:

$$\begin{array}{ll} a) 3x + 4y + z = 0 ; \vec{u} = (1, 2, 3) & b) 3x + 4y + z = 0 ; \vec{u} = (2, 3, -18) \\ c) (t + s, s - t, t - s) ; \vec{u} = (2, 3, 4) & d) (t + s, t - s, s - t) ; \vec{u} = (2, 0, 0) \end{array}$$

4.1.2 Espaço vetorial afim

Nos exercícios trabalhamos com translações de retas e planos. Uma reta, ou um plano, que passe pela origem é um espaço vetorial. Uma translação de um espaço vetorial que não passe pela origem se chama *espaço vetorial afim*.

Generalizamos esta noção se retirarmos da frase anterior a restrição “não passe na origem” de formas que os espaços vetoriais também possam ser considerados *espaços vetoriais afins*.

Isto nos permite dizer que retas e planos são *espaços vetoriais afins*, simplesmente.

4.2 A solução de uma equação linear

Vamos fazer uma descrição “*abstrata*” da solução de uma equação linear. O protótipo do problema é uma transformação linear

$$E \xrightarrow{T} F$$

em que E, F são dois espaços vetoriais. Esta forma de apresentar o problema serve inclusive para a discussão das equações diferenciais lineares, por exemplo. Faremos uso da última lista de exercícios como um laboratório em que o estudante desenvolveu a intuição necessária à compreensão do problema.

Dada uma função linear $E \xrightarrow{T} F$ definida entre os espaços vetoriais E, F , veja o diagrama de Venn, figura (fig. 4.1), página 109, existe um conjunto que

é *efetivo* relativamente à transformação T , a imagem, $Im(T)$ de modo que a equação

$$T(x) = b$$

somente terá solução se $b \in Im(T)$. Este é o primeiro passo na discussão de uma equação linear:

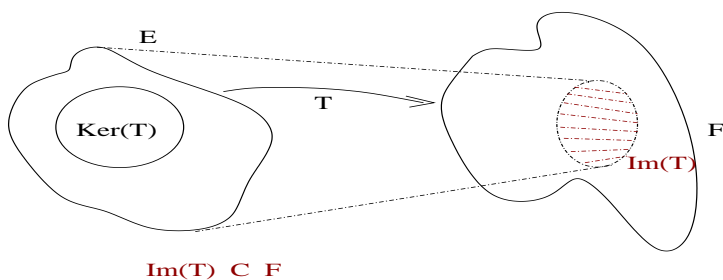


Figura 4.1: . Espaços de saída e de chegada

a verificação de se

$$b \in Im(T) ; T(x) = b$$

se o vetor de dados está na imagem de T .

Quando consideramos uma *transformação linear*, a linearidade nos leva a um resultado muito especial, consequência direta de um resultado que já estudamos:

A solução de um sistema homogêneo é um espaço vetorial, é $Ker(T)$.

Suponha que conheçamos duas soluções particulares³, x_1, x_2 de $T(x) = b$

$$T(x_1) = b, T(x_2) = b.$$

Calculando a diferença destas equações

$$T(x_1) - T(x_2) = b - b = 0 = T(x_1 - x_2) \quad (4.4)$$

portanto a diferença de duas *soluções particulares* é solução da equação homogênea.

Como as contas valem para duas soluções quaisquer, vamos escrever as contas novamente assim

$$T(x_0) - T(x) = b - b = 0 = T(x_0 - x) \quad (4.5)$$

cujo significado agora é que nos fixamos em uma solução particular, x_0 , que obtivemos de alguma forma, e uma outra solução x , que *deve* existir, se $\text{Ker}(T) \neq 0$ (ou equivalentemente $\dim(\text{Ker}(T)) \geq 1$), discutiremos em seguida o caso em que $\dim(\text{Ker}(T)) = 0$.

Temos:

$$T(x_0 - x) = 0 \equiv T(x - x_0) = 0 \quad (4.6)$$

$$x - x_0 \in \text{Ker}(T) \quad (4.7)$$

$$x \in \text{Ker}(T) + x_0 \quad (4.8)$$

e podemos, agora, fazer a conta que podemos traduzir com as palavras “ x pertence a uma translação x_0 do núcleo de T . Veja isto expresso na figura (fig. 4.2) página 112, quando $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$.

Observe que as contas que fizemos assim nada tem de particular, apenas a figura feita sob a hipótese de que $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$ para que obtivéssemos um gráfico compreensível.

Numa linguagem algorítmica, o método para resolver equações lineares é

- Considere a equação linear

$$T(x) = b ; E \xrightarrow{T} F$$

- primeiro passo: Verificamos se $b \in \text{Im}(F)$;
- segundo passo: Procuramos uma solução particular x_0 da equação, por exemplo, escalonamos a matriz se tivermos uma equação matricial⁴.
- terceiro passo: Procuramos o $\text{Ker}(T)$, se a equação for matricial, calculamos o posto da matriz e usando o Teorema do núcleo e da imagem, calculamos a dimensão de $\text{Ker}(T)$.

³estas palavras soam naturais para quem já estudou equações diferenciais lineares...

⁴equações lineares não precisam ser matriciais, podem ser equações diferenciais...

- parte final: A solução da equação será

$$Ker(T) + x_0$$

. Na figura (fig. 4.2) a solução é a reta $Ker(T) + x_0$ paralela a $Ker(T)$ passando pelo ponto x_0 que é uma solução particular da equação.

Desta forma provamos o teorema

Teorema 29 *Solução de equações lineares*
 Se

$$E \xrightarrow{T} F$$

for uma função linear então a equação linear

$$T(x) = b$$

tem solução somente se

$$b \in Im(T)$$

e neste caso a solução geral será uma translação do núcleo,

$$Ker(T) + x_0,$$

em que x_0 é uma solução particular da equação.

4.2.1 Quando $dim(Ker(T)) = 0$

Se $dim(Ker(T)) = 0$ então $Ker(T)$ é o ponto $\{0\}$, o espaço vetorial trivial. Vale o teorema (Teorema 29) nos mesmos termos como se encontra enunciado, mas neste caso a solução resume a x_0 que é a translação

$$Ker(T) + x_0 = \{0\} + x_0.$$

Neste caso a solução é única. Se a equação for matricial, então o determinante da matriz é diferente zero e ela poderá ter uma forma triangular equivalente com todos os elementos da diagonal diferentes de zero conduzindo o sistema de equações a uma única solução.

4.3 Independência linear das soluções

Vamos dar mais passo na compreensão dos sistemas de equações lineares e como consequência final teremos a demonstração *Teorema do Núcleo e da Imagem* que ainda lhe estamos devendo. Começaremos com um *laboratório* em você vai se treinar com as idéias básicas que precisaremos.

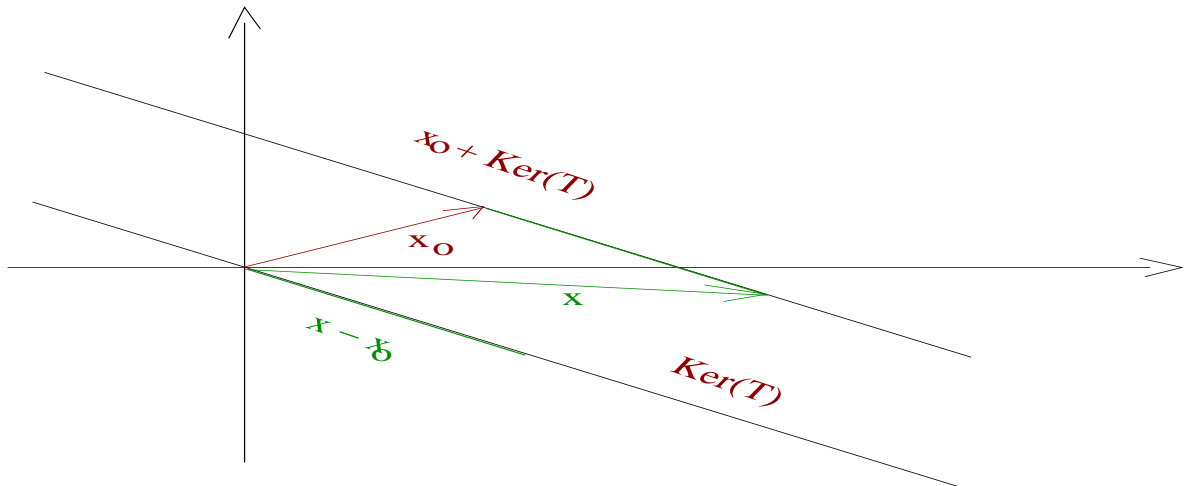


Figura 4.2: Translação do núcleo

Laboratório 14 *Sistemas linear, estrutura da solução*

- 1.
- 2.

4.4 Base e matriz

A mudança do referencial no espaço vetorial altera a matriz de uma transformação linear, mas não altera a solução de uma equação linear porque não modifica o *problema* que a matriz representa, *modela*. Em outras palavras, a *matriz* de uma transformação linear é consequência da escolha de uma base, ela é uma forma de *modelagem do problema*.

Veremos mais a frente que isto pode ser usado com o objetivo de encontrarmos uma matriz mais simples para uma determinada transformação ou ainda melhor, podemos procurar a *base* em que uma determinada transformação linear tem uma matriz mais simples.

Em 1985, (a data não é precisa), Ingrid Daubechies encontrou uma *base* adequada às ondas sonoras como elas são percebidas pelo ouvido humano^a este fato alterou algoritmos até então usados nas telecomunicações: a escolha de uma base adequada. O assunto é *wavelets*, ver [14], onde mais bibliografia pode ser encontrada. Vamos ver a parte elementar deste assunto aqui.

^apara descrever, ou modelar as ondas sonoras

Já vimos que as colunas de uma matriz T , geram a imagem, $Im(T)$, em

que

$$E \xrightarrow{T} F$$

é a transformação linear que T representa.

Vamos tornar este tópico mais preciso partindo de uma base escolhida para nos espaços E, F .

O cenário que nos interessa aqui é o seguinte:

- Consideramos dois espaços vetoriais E, F de dimensão finita, e neles escolhemos as bases

$$e = \{e_1, \dots, e_n\} \text{ base de } E$$

$$f = \{f_1, \dots, f_m\} \text{ base de } F$$

- Consideramos a transformação linear

$$E \xrightarrow{T} F$$

A linearidade de T nos permite, dado um vetor $u \in E$ escrever sucessivamente:

•

$$u = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k$$

•

$$T(u) = \sum_{i=1}^n \alpha_i T(e_i)$$

- Mas, para cada i , $T(e_i) \in F$ e portanto pode ser expandido relativamente à base \underline{f} o que nos permite escrever, para cada i

$$T(e_i) = \sum_{j=1}^m \beta_j f_j$$

- Se substituirmos esta última soma na soma anterior, vamos obter

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j f_j$$

- Mas para cada par de índices (i, j) o produto $\alpha_i \beta_j$ é um número que podemos chamar $a_{ij} = \alpha_i \beta_j$ e assim encontramos uma matriz que tem $m = \dim(F)$ linhas e $n = \dim(E)$ colunas, uma matriz $m \times n$

Esta matriz $\mathcal{A} = (a_{ij})$ é a representação matricial da transformação linear T relativamente às bases $\underline{e}, \underline{f}$ escolhidas para os espaços $\underline{E}, \underline{F}$.

4.5 Exercícios resolvidos

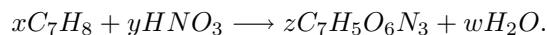
Um *exercício resolvido* é uma *pequena teoria* para a qual os autores não conseguiram encontrar local exato no texto, e que ao mesmo tempo consideram que o esforço pessoal do leitor para construí-la é uma contrinuição para o seu desenvolvimento. Você fica, assim, convidado a tentar sempre resolver os exercícios antes de ler a solução e possivelmente não se conformar com a solução aqui apresentada.

Nos exercícios abaixo, a menos que o contrário seja indicado, a base do espaço vetorial \mathbf{R}^n é a *canônica*

$$(1, 0, \dots, 0) \cdots (0, 0, \dots, 1)$$

Exercícios 6 *Sistemas Lineares*

1. Compostos químicos, [4]⁵ Considere a reação química descrita no (ex. 8, página 61). Resolva o sistema linear que rege a reação química que deriva do tolueno C_7H_8 e ácido nítrico HNO_3 o trinitrotolueno $C_7H_5O_6N_3$ mais água,



e justifique (quimicamente) a multiplicidade de soluções encontradas, se você for estudante de química. Os autores agradecem algum comentário a respeito.

2. espaço de polinômios. Seja $\mathbf{R}_2[x]$ o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a 2 com coeficientes reais. Mostre que a função derivada

$$F : \mathbf{R}_2[x] \longrightarrow \mathbf{R}_2[x] ; D(P) = P'$$

é uma função linear e encontre a matriz \mathcal{A} de D relativamente a base

$$1, t, t^2.$$

Resposta

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

3. espaço de polinômios. Seja $\mathbf{R}_2[x]$ o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a 2 com coeficientes reais. Defina em $\mathbf{R}_2[x]$ a função

$$F : \mathbf{R}_2[x] \longrightarrow \mathbf{R}_2[x] ; F(p(t)) = (2t - a)p(t + 1) - t^2p'(t)$$

em que a é um número real dado.

(a) Prove que F é linear.

⁵Compostos químicos aqui citados são danosos para a saúde, o objetivo é apenas exemplificar o uso de sistemas lineares. ver <http://www.atsdr.cdc.gov/es/toxfaqs/es.tfacts56.html>

(b) Encontre a matriz \mathcal{A} de F relativamente à base

$$1, t, t^2$$

(c) Calcule $\text{Ker}(F)$

4. Estocolmo, 13/01/2003 Encontre o cosseno do ângulo agudo entre a reta de equação

$$(x, y, z) = (1, 0, 1) + t(1, 0, 2)$$

e o plano de equação

$$x = 2 + t + s, y = 3 - t + s, z = 4 + t + 2s$$

Considere no espaço \mathbf{R}^3 a base canônica

$$(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1).$$

5. Considere uma sucessão de matrizes definida recursivamente por

$$A_{n+1} = A_n^2; A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Descubra a expressão geral para a matriz A_n e prove que sua hipótese é correta.

6. Resolva, o sistema abaixo e discuta sua solução para cada número real \underline{a}

$$\begin{cases} x - y + z & = a \\ x + y + 3z & = a + 2 \\ 2x - 2y + (a + 1)z & = (a + 1) \end{cases}$$

7. operador diferencial linear Verifique que a equação diferencial

$$y'' + py' + qy = 0$$

é equivalente ao sistema de equações

$$\begin{cases} y' = & z \\ z' = -py' - qy = -pz - qy \end{cases} \quad (4.10)$$

$$(4.11)$$

e conseqüentemente pode ser escrita em forma matricial. Obtenha a forma matricial equivalente deste equação.

8. Discretização de um sistema Considere uma função

$$\mathbf{R}^3 \supset \Omega \xrightarrow{F} \mathbf{R}$$

que representa uma força potencial, por exemplo o conjunto das forças atuando sobre um prédio, gravidade, ventos, peso da estrutura. Uma estrutura metálica, ver figura (fig. 2.4) página 63, pode ser concebida como uma discretização da estrutura e podemos modelar a atuação de F a partir das taxas de variação aplicadas nos nós da estrutura metálica (discretização). Na figura considerada existem 8 nós e considere $(\frac{\partial F_k}{\partial e_1}, \frac{\partial F_k}{\partial e_2}, \frac{\partial F_k}{\partial e_3})$ seja estas taxas de variação no nó x_k . Interprete

$$g(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial e_1} & \frac{\partial F_1}{\partial e_2} & \frac{\partial F_1}{\partial e_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_8}{\partial e_1} & \frac{\partial F_8}{\partial e_2} & \frac{\partial F_8}{\partial e_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \\ x_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

em que as derivadas parciais estão sendo calculadas no ponto (a_1, a_2, a_3) . Na figura (fig. 2.4) você pode ver algumas dessas forças, $(f_{3,x}, f_{3,y})$, representadas.

Se interpretarmos

$$f_{k,x} = \frac{\partial F}{\partial e_k}$$

podemos dizer que a figura (fig. 2.4) representa a discretização de um sistema, por exemplo da gravidade, obtido com a análise estrutural feita nos 8 nós considerados

- (a) Escreva a matriz \mathcal{A} , 8×3 que descreve este sistema.
 (b) Se o sistema for estático (sem movimento) então a resultante é zero. Expresse isto com um sistema linear.

Solução 3 (a)

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial e_1} & \frac{\partial F_1}{\partial e_2} & \frac{\partial F_1}{\partial e_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_8}{\partial e_1} & \frac{\partial F_8}{\partial e_2} & \frac{\partial F_8}{\partial e_3} \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

(b)

9. Considere uma matriz da forma

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

em que A_i, B_i, C_i são números⁶ reais (ou complexos). Prove que o sistema

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tem pelo menos uma reta como solução.

⁶e poderiam ser outra coisa ?

Solução 4 *Todo sistema homogêneo (quando a matriz dos dados é nula) tem pelo menos uma solução que é o zero.*

Podemos completar esta matriz com $A_3 = 0, B_3 = 0, C_3 = 0$ sem alterar o significado do problema que ela representa deixando agora claro que $\det \mathcal{A} = 0$ e portanto que núcleo, $\ker(\mathcal{A})$, tem dimensão maior ou igual a 1.

Por exemplo se tivermos o sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

A dimensão do núcleo é 1 quer dizer que as soluções são retas passando por um ponto (solução particular). A dimensão da imagem - o espaço dos dados, é dois, qualquer ponto $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ é um dado válido para este sistema de equações e a solução é reta perpendicular ao plano XOY passando pelo ponto (a, b) .

Outro exemplo, considere o sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

*** aqui*

Parte II

Decomposição de matrizes

Uma das características da ciência, e em particular das *estruturas* em Matemática é a busca de elementos simples com os quais podemos gerar todos os elementos de um determinado espaço, por exemplo,

- na Física as partículas básicas, átomos, prótons, nêutrons e diversas outras (mas não muitas) que compõem toda a matéria, ou a energia, que é um estado da matéria;
- os elementos químicos com os quais podemos compor *todo o restante da matéria que existe no Universo*, mineral ou biológica, porém eles mesmos feitos com as partículas básicas da Física;
- na biologia o ácido DNA constituído de apenas seis compostos químicos mas, que, nos seus diversos arranjos guardam todas as informações dos diversos tipos de células que compõem o corpo de qualquer ser vivo, mas os compostos químicos do DNA são constituídos com os elementos químicos básicos;
- teoria da informação os *bytes* com que podemos registrar, transmitir, toda a informação que conhecemos, como textos, arquivos de computador, fotografias etc..
- Os algoritmos básicos de um sistema de numeração com os quais constituímos todos os demais números, mas também representamos os algoritmos básicos com *bytes*;
- na Álgebra Linear os vetores básicos que geram um espaço vetorial, ou matrizes mais simples com as quais podemos construir outras matrizes.

De forma análoga, se busca encontrar matrizes *simples* dentro as muitas que representam uma *transformação linear*, este é o objetivo deste capítulo e do próximo.

Capítulo 5

Autovalor e autovetor

A solução de um sistema de equações lineares implica em uma série de operações com matrizes nos levando a discutir *formatos especiais* para as matrizes, como matrizes triangulares e um caso especial destas, as matrizes escalares,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

que tem elementos diferentes de zero apenas sobre a diagonal principal. Como temos feito até agora, estamos os concentrando em matrizes quadradas, as outras matrizes tem a sua teria dedutível destas.

5.1 Autovalor e autovetor

O primeiro laboratório deste capítulo deve conduzi-lo a entender o significado dos autovalores e seus correspondentes autovetores. A tônica será dada aos exemplos e pequenos experimentos. O método consiste em usar matrizes diagonais e escalares, aquelas que somente tem entradas não nulas em cima da diagonal principal, estas matrizes estão associadas ao problema dos *autovalores* ou dos *autovetores*. Nestas matrizes os autovalores aparecem explicitos.

5.1.1 Primeiros exemplos de autovalor e autovetor

As duas formas para matrizes, *diagonal* ou *escalar* são as formas mais simples que uma matriz pode assumir, e o *problema* é que nem sempre podemos conseguir este formato para uma matriz qualquer. Neste capítulo vamos estudar quando isto é possível e quais as consequências desta possibilidade.

Laboratório 15 *Matrizes escalares*

1. matriz escalar Considere a matriz $T = 3 * I$ em que I representa a matriz identidade 3×3 . Quais das afirmações abaixo são verdadeiras:

- (a) Para todo vetor $x \in \mathbf{R}^3$; $Tx = x$
- (b) Para todo vetor $x \in \mathbf{R}^3$; $Tx = 3x$
- (c) $\text{Ker}(T) = \{0\}$
- (d) $\text{Im}(T) = \mathbf{R}^3$
- (e) T expande o \mathbf{R}^3 de três unidades.
- (f) T contrai o \mathbf{R}^3 de $\frac{1}{3}$.

2. matriz escalar Considere a matriz T cujas entradas são todas nulas exceto as da diagonal principal que são todas iguais ao número real λ . Uma matriz deste tipo se chama escalar. Verifique que $Tx = \lambda x$. Ou seja T expande o espaço inteiro, por igual, com o fator de expansão uniforme λ . Expande ou contrai, conforme $\lambda > 1$ ou $\lambda < 1$.

3. matriz escalar

- (a) Escreva a matriz que expande o \mathbf{R}^4 de 5 unidades.
- (b) Escreva a matriz que contrai o \mathbf{R}^3 com o fator 0.5.
- (c) Escreva a matriz que multiplica todos os vetores do \mathbf{R}^3 por -1 .

4. matriz escalar Verifique a identidade

$$T = \lambda I$$

se a matriz T for a matriz escalar que tem todas as entradas nulas exceto as da diagonal principal que são todas iguais ao número real λ . I representa a matriz identidade.

5. matriz diagonal Considere a matriz $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ definida no \mathbf{R}^3

com a base

$$e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$$

Verifique quais das afirmações são verdadeiras

- (a) T expande o subespaço $[e_1]$ com o fator 3.
- (b) T expande o subespaço $[e_3]$ com o fator -2 .
- (c) T expande o subespaço $[e_2]$ com o fator 3.

Resposta: errada, (a)

6. matriz diagonal Considere a matriz $\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ definida no \mathbf{R}^3

com a base

$$e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (1, 1, 0), e_3 = (1, 1, 1)$$

Verifique quais das afirmações são verdadeiras

- (a) \mathcal{T} expande o subespaço $[e_1]$ com o fator 2.
- (b) \mathcal{T} expande o subespaço $[e_3]$ com o fator -2 .
- (c) \mathcal{T} expande o subespaço $[e_2]$ com o fator 3.

Resposta: erradas, (b), (c), a base foi mudada!

7. matriz diagonal Na matriz \mathcal{S} todas as entradas são nulas exceto as da diagonal principal onde se encontram os números $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Considere em \mathbf{R}^n a base

$$\{e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)\}$$

Uma matriz deste tipo se chama diagonal. Mostre que ¹

$$\mathcal{S}x = \lambda_i x \iff x \in [e_i]$$

8. matriz diagonal Na matriz \mathcal{S} todas as entradas são nulas exceto as da diagonal principal onde se encontram os números $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Considere em \mathbf{R}^n a base

$$\{e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)\}$$

Mostre que

$$\mathcal{S} = \lambda \mathcal{I}$$

não é uma identidade e sim uma equação. Encontre as n soluções desta equação.

9. equação característica

Definição 25 Equação característica

Dada uma matriz $n \times n$ \mathcal{S} a expressão

$$\det(\mathcal{S} - \lambda \mathcal{I})$$

é uma equação polinomial chamada equação característica associada à matriz \mathcal{S} .

¹As matrizes escalares são um caso particular de matrizes diagonais com o mesmo escalar em todas as posições da diagonal

Para cada uma das matrizes \mathcal{S} abaixo, resolva a equação característica

$$\det(\mathcal{S} - \lambda \mathcal{I})$$

na variável λ .

$$\begin{array}{llll} a) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} & b) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} & c) \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & d) \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \\ e) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & f) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & g) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & h) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ i) \begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & j) \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -0.5 & 0 \end{pmatrix} & k) \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} & l) \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

10. Verifique quais das afirmações abaixo são verdadeiras para uma matriz \mathcal{S} de dimensão $n \times n$

- (a) A equação característica é de grau maior do que n
- (b) A equação característica é de grau menor do que n
- (c) A equação característica é de grau menor ou igual a n .

11. expansão de subespaço

Analise o resultado do item anterior e conclua se é verdade que

- (a) a matriz \mathcal{S} expande uniformemente o espaço gerado pelo vetor e_i . Dê exemplo que apoie sua resposta.
- (b) a matriz \mathcal{S} expande de forma diferente os espaços gerados pelos vetores e_i e e_j se $i \neq j$. Dê exemplo que apoie sua resposta.

12. deformações geométricas

- (a) Verifique que a matriz $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ transforma círculos de centro na origem e raio r em círculos de centro na origem de raio $3r$. **Sugestão** As equações paramétricas de um círculo de centro na origem são $(r\cos(t), r\sin(t))$.
- (b) Verifique que a matriz $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ transforma círculos de centro na origem em elipses com taxa de distorção $\frac{3}{4}$.

13. matriz diagonal Na matriz \mathcal{S} todas as entradas são nulas exceto as da diagonal principal onde se encontram os números $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Considere em \mathbf{R}^n a base

$$\{e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (1, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (1, 1, \dots, 1)\}$$

(a) Mostre que

$$\mathcal{S}x = \lambda_i x \iff x \in [e_1]$$

(b) Mostre que

$$Sx = \lambda_i x \iff x \in [e_i]$$

é falso para todo $i > 1$.

(c) Escolha as opções certas:

- i. A escolha da base no espaço altera o significado das matrizes.
- ii. Um operador linear tem diversas matrizes que são a “cara matricial do operador” associada a uma determinada base escolhida para o espaço vetorial.
- iii. Uma matriz representa um único operador linear.
- iv. Um operador linear tem uma matriz que o representa.

5.1.2 Autovalor: a definição e o método

Nos exercícios do *laboratório* nos fixamos na propriedade que têm alguns operadores lineares, aqui todos representados por matrizes, de expandir certas regiões do espaço nas quais eles atuam como se fossem *escalares*. O escalar λ que corresponde a esta expansão (ou contração) recebe um nome assim como o vetor expandido (na verdade o espaço expandido):

Definição 26 *Autovalor, autovetor* Se para uma transformação houver algum vetor \vec{x} tal que

$$\lambda \neq 0; T\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

dizemos que λ é **autovalor** de T e que \vec{x} é um **autovetor** associado ao autovalor λ . Autovalores e autovetores também são chamados **valores próprios** e **vetores próprios**.

As matrizes diagonais são formados de autovalores em sua diagonal quando a base do espaço for a base canônica

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1).$$

Para determinar os *autovalores* somos levados a resolver a equação

$$Tx = \lambda x. \tag{5.1}$$

Um dos itens do *laboratório* nos conduziu a formas equivalentes desta equação:

$$Tx = \lambda Ix \iff (T - \lambda I)x = 0$$

e é em geral a última forma que sempre usamos quando o operador linear estiver expresso sob forma de uma matriz. Como “queremos” ter soluções, na variável λ , diferentes da *trivial*

$$\lambda \neq 0$$

então concluímos que

$$\det(T - \lambda I) = 0,$$

portanto o sistema homogêneo tem soluções não triviais. Demonstramos assim o teorema

Teorema 30 *Autovalores*

Dada uma matriz T as raízes da equação característica

$$\det(T - \lambda I)$$

são os autovalores de T

A terminologia é confusa, em geral a terminologia em Matemática é mais precisa. As denominações

- autovalor
- valor próprio
- valor característico

se referem ao mesmo conceito, assim como

- autovetor
- vetor próprio
- vetor característico

e o que é pior, a equação algébrica de grau *menor ou igual* a n

$$\det(S - \lambda I)$$

se designa *exclusivamente* por *equação característica*.

Neste livro vamos usar a terminologia *autovalor*, *autovetor* e *equação característica*.

Observação 13 *O autovalor nulo e o autovetor nulo*

Observe que a definição descarta o “autovalor” nulo, ele não acrescentaria nenhuma informação, produziria o núcleo do operador. Depois você verá que ele seria inútil para os objetivos que temos com o conceito de autovetor, mas o núcleo pode ser agregado ao conjunto dos autoespaços. Esta é uma linha de ação que retomaremos ainda na decomposição de um espaço relativamente às propriedades de um operador.

Por outro lado o vetor zero satisfaz à definição de autovetor com qualquer escalar:

$$T0 = \lambda 0.$$

Consequentemente vamos simplesmente considerá-lo um elemento de qualquer autoespaço como uma complementação natural destes conjuntos. Sem o vetor zero eles não seriam espaços vetoriais.

5.1.3 Estrutura dos autovetores associados a autovalores

No próximo laboratório faremos mais alguns experimentos para entender melhor o significado dos autovalores, quando eles existirem, e a estrutura do conjunto dos autovetores e do conjunto dos autovalores.

O conjunto dos *autovalores* é chamado de *espectro* de um operador linear e nos dá informações sobre o operador.

Também vamos ver que tem sentido alterar o sistema de referência do espaço, para *adotar uma base de autovetores* quando houver uma boa coleção de autovalores. Neste momento estamos perdidos por usar diretamente matrizes para representar os operadores lineares, mas logo retornemos a história pelo outro lado da descrição em que os operadores lineares terão expressões analíticas, não matriciais, neste momento a figura ficará inteiramente clara, quando separarmos os conceitos de *matriz* e *operador linear*.

Vamos introduzir uma definição que será necessária em um dos itens do laboratório.

Definição 27 *Matriz de mudança de base.* Uma matriz T se diz de *mudança de base* se ela transforma $T\vec{e}_i$ em \vec{v}_i em que $(\{\vec{e}_i\}_i, \{\vec{v}_i\}_i)$ são duas bases do espaço.

Definição 28 *Espectro de um operador linear*

O conjunto dos autovalores de um operador linear T se chama de *espectro* de T e usamos a notação $\sigma(T)$ para nos referirmos a este conjunto.

Laboratório 16 *Autovetores e base de autovetores*

1. Multiplicidade dos autovetores Considere uma matriz T .

- múltiplo de um autovetor Suponha que \vec{u} seja um autovetor de T associado ao autovalor λ . Mostre que qualquer múltiplo de \vec{u} também é um autovetor.
- combinação linear de autovetores Suponha que \vec{u}_1, \vec{u}_2 sejam autovetores de T associados ao autovalor λ . Mostre qualquer combinação linear $\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2$ é um autovetor de T associado a λ .
- Escolha a alternativa certa justificando sua resposta:
 - O conjunto E_λ dos autovetores de T associados a λ é um espaço vetorial;
 - Se acrescentarmos o vetor zero ao conjunto E_λ dos autovetores de T associados a λ então E_λ se torna um espaço vetorial;

2. Encontre os autovalores e os autovetores associados à matriz

$$1) T_1 = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \quad 2) T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 5 & 0 & 8 \\ 8 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Respostas

(a) autovalores 4, 2 ; autovetores (3, -1), (2, -1)

(b) autovalores -5, -8, 13 ; autovetores (5, -13, 5), (8, 8, -13), (1, 1, 1)

Solução completa no capítulo final do livro.

3. autovalores distintos

(a) Suponha que o operador linear T tenha dois autovalores $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e associados a estes autovalores, respectivamente, os autovetores \vec{u}_1, \vec{u}_2 . Mostre que o conjunto $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ é l.i.

(b) hipótese de indução Suponha que o operador linear T tenha $k > 2$ autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ distintos considere os autovetores respectivamente associados a estes autovalores, $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$.

hipótese: os vetores $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ são l.i.. Verifique que se T tiver mais um autovalor λ_{k+1} distintos dos demais, então o conjunto $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k, \vec{u}_{k+1}\}$ será também l.i. em que \vec{u}_{k+1} é o autovetor associado a λ_{k+1} .

4. matriz sem autovalores

(a) Verifique que a matriz de rotação real $\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ não pode ter autovalores, nem autovetores, a não ser para exatamente para dois valores de θ , quais?

(b) Verifique que esta matriz tem um autovalor, determiná-lo, se representar $T : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$

5. número máximo de autovalores Considere uma matriz T que representa um operador linear

$$T : \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^n$$

(a) Enuncie um teorema da Álgebra que garante que T tem exatamente \underline{n} autovalores, com possível repetição.

(b) Considere agora $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$. Decida quais das afirmações são corretas, e justifique

i. T terá exatamente \underline{n} autovalores;

ii. T terá no máximo \underline{n} autovalores;

iii. T terá no mínimo \underline{n} autovalores;

6. espaço próprio Suponha que haja dois autovetores l.i. v_1, v_2 associados ao autovalor λ_1 . Mostre que os vetores do espaço

$$[v_1, v_2],$$

gerado por estes vetores, são autovetores associados a λ_1 .

7. base de vetores próprios. A matriz $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ representa o operador linear A relativamente à base ortogonal

$$\{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$$

do \mathbf{R}^2 .

(a) Encontre os autovalores de \mathcal{A} e um par de autovetores \vec{v}_1, \vec{v}_2 correspondendo aos autovalores encontrados, para matriz.

Resposta $\lambda \in \{3, 2\}; v_1 = (1, 1), v_2 = (2, 1)$

(b) Verifique, e justifique, que

$$\{v_1 = (1, 1), v_2 = (2, 1)\}$$

é uma base para o espaço \mathbf{R}^2 .

(c) Resolva a equação linear, (use `scilab`),

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(d) Decida qual das afirmações seguintes é verdadeira relativamente à matriz $\mathcal{T} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que você encontrou na solução do sistema anterior.

i. \mathcal{T} transforma a base $\{e_1, e_2\}$ na base $\{v_1 = (1, 1), v_2 = (2, 1)\}$;

ii. \mathcal{T} transforma a base $\{v_1 = (1, 1), v_2 = (2, 1)\}$ na base $\{e_1, e_2\}$.

Veja na figura (fig. 5.1) página 132,

(e) Calcule o produto $\mathcal{T} * \mathcal{A} * \mathcal{T}^{-1}$ e justifique o resultado.

(f) Qual é a matriz de A relativamente a base de autovetores? Verifique as contas.

(g) Encontre a matriz de mudança de base, \mathcal{M} .

Vamos à síntese dos resultados do laboratório:

- multiciplidade dos autovetores Qualquer múltiplo de um autovetor associado a um determinado autovalor é também um autovetor.
- autoespaço Mais geralmente, se uma coleção de *autovetores* estiver associado a um *autovalor*, o espaço gerado por estes *autovetores* é formado de autovetores associados ao *autovalor*.
- equação característica Os *autovalores* da matriz \mathcal{T} são as raízes da *equação característica*

$$\det(\mathcal{T} - \lambda \mathcal{I})$$

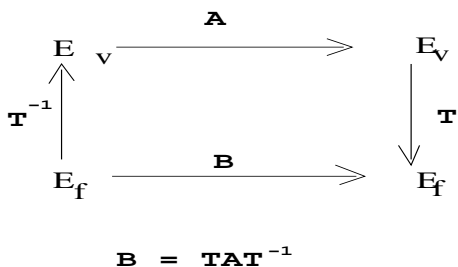


Figura 5.1: Matriz de mudança de base

- inexistência de autovalores Há equações polinômiais que não tem raízes sobre o corpo dos reais isto sugere que esta teoria somente pode ser bem aplicada se o corpo de base for o dos números complexos.
- distintos autovalores Se \vec{u}_1 for um autovetor associado a λ_1 e \vec{u}_2 for um autovetor associado a λ_2 então

$$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$$

é um conjunto *l.i.*

Como os "experimentos" feitos foram de caracter "abstratos" nós assim provamos o teorema:

Teorema 31 *Matriz de autovalores*

Seja T um operador linear definido em \mathbf{R}^n e consideremos as $m \leq n$ raízes da equação característica de T , os autovalores

$$\lambda_1, \dots, \lambda_m$$

e um conjunto de autovetores correspondentes a estes autovalores

$$\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m$$

- Se $m = n$ então a matriz de T relativamente à base

$$\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$$

é uma matriz diagonal contendo os autovalores

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n.$$

- Se $m < n$ então podemos completar uma base para \mathbf{R}^n a partir dos autovetores l.i.

$$\underbrace{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m}_{m \text{ vetores}}, \underbrace{\vec{u}_{m+1}, \dots, \vec{u}_n}_{n-m \text{ vetores}}$$

de tal modo que T tenha uma matriz relativamente a esta base (e não será 'única'), divida em blocos, um bloco-diagonal formado pelos autovalores e outro bloco de dimensão $n \times n - m$ cujas colunas serão da forma $T(\vec{u}_j)$; $j > m$

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \cdots & 0 & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & \lambda_2 \cdots & 0 & a_{2,m+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & 0 \cdots & \lambda_m & a_{m,m+1} & \cdots & a_{m,n} \\ \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & 0 \cdots & 0 & a_{n,m+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

O teorema somente pode garantir o que obtivemos a partir de nossos experimentos. Por exemplo, os vetores

$$\vec{u}_{m+1}, \dots, \vec{u}_n$$

podem estar no núcleo do operador T e neste caso os números $a_{k,j}$ que aparecem na matriz seriam todos nulos e

$$\text{posto}(T) = \text{posto}(T) = m.$$

Teorema 32 Dependência linear e autovetores

Sejam dois autovalores $\lambda_1 \neq \lambda_2$ de um operador linear T . Dois correspondentes autovetores v_1, v_2 são linearmente independentes

Dem:

Por absurdo, vamos supor que v_1, v_2 sejam l.d., suponhamos que $v_1 = \alpha v_2$ para um determinado escalar α . Aplicando T temos

$$T(v_1) = \lambda_1 v_1 \tag{5.2}$$

$$T(v_1) = T(\alpha v_2) = \lambda_2 \alpha v_2 \tag{5.3}$$

$$\lambda_1 v_1 = \lambda_2 \alpha v_2 \longrightarrow v_1 = \alpha \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 = \alpha' v_2 \tag{5.4}$$

como $\alpha' \neq \alpha$, um absurdo logo v_1, v_2 são l.i. **q.e.d.**

Observe que um corolário deste teorema é os autoespaços, correspondentes a distintos autovalores, são diferentes e portanto podemos decompor o espaço em subespaços diferentes de acordo com um operador linear.

5.2 Exercícios sobre autovalor e autovetor

Exercícios 7 Autovalor e autovetor

1. autovetor e operador diferencial Considere o operador diferencial

$$L(y) = y''$$

- (a) Verifique que os vetores

$$y = \text{sen}(x) ; y = \text{cos}(x)$$

são dois autovetores l.i. de L . Identifique os autovalores aos quais eles estão associados.

- (b) Descubra um autovetor associado ao autovalor 1 para o operador L .
(c) Fórmula de Abel-Euler Verifique que

$$y = e^{ix}$$

é um autovetor de L , encontre a que autovalor está associado.

- (d) Verifique que $y = e^{ix}$ pertence ao espaço gerado pelos vetores $y = \text{cos}(x), y = \text{sen}(x)$.

2. Raizes racionais de polinômios

- (a) Prove que se

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbf{R}[x]$$

com coeficientes forem inteiros, tiver uma raiz inteira $r \in \mathbf{Z}$ então r divide a_0

Solução 5

$$P(r) = a_n r^n + \dots + a_1 r + a_0 = 0$$

$$a_n r^n + \dots + a_1 r = -a_0 \in \mathbf{Z}$$

$$a_n r^{n-1} + \dots + a_1 = -\frac{a_0}{r} \in \mathbf{Z}$$

- (b)

- (c) Prove que se

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbf{R}[x]$$

com coeficientes inteiros e se $r = \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$ for uma raiz de P então p divide a_0 sendo p, q são primos entre si.

Sugestão: multiplique por q^n e use o item anterior.

3. aplicação de matrizes diagonais.

(a) Suponha que $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ sejam os distintos componentes de um sistema econômico,

todos indispensáveis e independentes. A economia de um setor \vec{v} deste sistema, (um município, por exemplo, dentro de um país), caracteriza sua presença no sistema com os pesos $\{x_1, \dots, x_n\}$ com que participam na produção: $\vec{v} = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n$. E os vetores são definidos pela relação

$$\vec{e}_i = \delta_{ij}$$

Delta de Kronecker

$$\delta_{ij} = 1 \iff i = j ; \delta_{ij} = 0 \iff i \neq j$$

formando um sistema ortogonal de vetores.

Se o município não produzir o item \vec{e}_i então $x_i = 0$. A matriz T memoriza a evolução do sistema em dois momentos. Suponha que o município \vec{v} duplicou sua presença na economia com os produtos $\{\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_7\}$, não teve presença relativamente aos produtos $\{\vec{e}_2, \vec{e}_4, \vec{e}_6, \vec{e}_8, \vec{e}_9, \vec{e}_{10}\}$, e sua produção de \vec{e}_5 se reduziu a, metade, relativamente ao período anterior observado. Suponha que o número de itens da economia é 10, (sua dimensão). Determine a matriz T que memoriza a transição de um estado da economia \vec{v} para o seguinte $T\vec{v}$.

(b) planejamento político-econômico Considere a mesma terminologia anterior, mas agora consideremos que a matriz T com elementos diagonais $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ representa as taxas de juros aplicadas aos empréstimos de financiamentos na produção dos distintos componentes. Qual o significado econômico para o município se o banco central estabelecer as taxas de juros $\{\lambda_1 = 10\%a.m. = \dots = \lambda_7 = 10\%, \lambda_8 = \lambda_9 = \lambda_{10} = 1\%a.m.\}$, não esquecendo que o município \vec{v} comparece na economia apenas com o itens $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_7$.

(c) Suponha que uma taxa de juros razoável seja de 2.5%a.a. e que o planejamento econômico deseje estimular a produção dos itens $\{\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_5\}$, desestimular a produção dos itens $\{\vec{e}_6, \vec{e}_8, \vec{e}_{10}\}$ e manter estáveis os restantes. Como poderia ser a matriz T ?

4. planejamento político-econômico Considere que um sistema de vetores ortogonais $(e_i)_{i=1\dots n}$; $e_{ij} = \delta_{ij}$

Considere que parte destes vetores representam as distintas profissões na economia, por exemplo, $i \leq n_1$ e a outra parte, por exemplo, $i > n_1$ representam os produtos industriais. Considere a matriz \mathcal{T} que distorce a economia com a inflação. Deduza que \mathcal{T} é uma matriz diagonal e que $\lambda_i > 1 \iff i > n_1$ e $\lambda_i < 1 \iff i \leq n_1$.

5. Verifique a identidade

$$\mathcal{A}x = \lambda x \equiv \mathcal{A} - \lambda \mathcal{I}x = 0$$

em que \mathcal{I} é a matriz identidade compatível com \mathcal{A} .

6.

7.

8.

Capítulo 6

Matrizes e suas formas especiais

Neste capítulo iremos estudar alguns assuntos que povoaram os capítulos anteriores de maneira informal, as propriedades das matrizes.

Começaremos do começo porque este capítulo será usado como referência pelos capítulos anteriores e sua leitura poderá ser feita de forma simultânea com o resto do livro.

Um sistema de equações pode ser escrito em forma mais simples, isto implica em alterarmos a matriz do sistema de equações para obter outra em uma forma tal que não altere o significado das solução do sistema.

Há duas formas de “*equivalência*” entre matrizes e vamos discutí-las aqui:

- *semelhança de matrizes (sistemas lineares)*
- *equivalência de matrizes*

para serem *semelhantes* as matrizes têm de ser *equivalentes*, assim a *semelhança* é um caso especial da *equivalência*.

6.1 A semelhança de matrizes

Aqui consideraremos uma matriz como esquema de números que guarda as informações de um sistema de equações lineares, ou de uma função linear.

Os *métodos* para transformar uma matrizes em outra que lhe seja semelhante são as *operações-linha* ou as *operações-coluna*, veremos que isto não altera o significado do sistema de equações, mas certamente nos obriga a registrar as operações feitas para podermos retornar às condições do *sistema primitivo*.

Um sistema de equações pode ser escrito em forma mais simples como um produto matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}, \quad (6.1)$$

e assim muitas das contas elementares que se podem fazer com equações do

primeiro grau,

$$ax + b = c ; a, b, c, x \in \mathbf{R}$$

podem ser repetidas com os vetores e com as matrizes.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n \times m, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n, \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^m, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n \quad (6.2)$$

As operações com as matrizes, sobre tudo as matrizes realmente grandes, como são necessárias para guardar dados, em informações do tipo

- análise econômica; O Departamento de Economia da Universidade do Missouri at St. Louis, rodava um programa de modelagem econômica numa estação RISC com dois processadores levando 12 meses para fazer a análise dos dados, em 2000, um agregado de 10 PCs rodando Linux conseguiu reduzir este tempo para 3 meses;
- previsão meteorológica. A NASA tem um centro, Goddard Space Flight Center, dedicado à meteorologia rodando, num Cray com 512 processadores um programa que coleta a nível mundial as informações meteorológicas. Em 1999 este computador levava 6 horas para processar as informações recebidas e outras 6 horas para montar o sistema de cartas meteorológicas, ver [11, 1999]. Você pode ler mais a respeito e inclusive obter informações bibliográficas no endereço eletrônico indicado na bibliografia.

Isto para citar apenas dois exemplos “grandes” em que se usam sistemas lineares, e que exigem um conhecimento mais *íntimo* com as propriedades das matrizes para que possamos encontrar atalhos que minimizem o tempo de cálculo. Nos casos acima é usada uma ferramenta computacional chamada *processamento paralelo* para a qual a Álgebra Linear tem uma contribuição significativa.

Em escala bem menor do que os dois exemplos acima, e mais próximo dos nossos meios, veja a diferença, no cálculo do determinante:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \quad (6.3)$$

$$2! = 4 \text{ termos} \quad (6.4)$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \quad (6.5)$$

$$a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{21} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{31} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

$$3! = 6 \text{ termos} \quad (6.7)$$

e podemos facilmente imaginar que o $\det(\mathcal{A})$, numa matriz 4 x 4, teria

$$4! = 24 \text{ termos,}$$

o que é verdade.

Os cálculos envolvendo grandes matrizes tem uma quantidade muito grande de operações o que os fazem proibitivos, mesmo com grandes computadores, se não tivéssemos atalhos adequados para contorná-los.

Mas já vimos que o escalonamento de matrizes é um desses atalhos que torna simples a solução de sistemas de equações substituindo as $n!$ operações necessárias ao cálculo de um determinante por

$$\frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n+1)n}{2} \approx n^2 < n!$$

operações necessárias para anular a metade dos termos de uma matriz e mais a resolução das n equações com um único coeficiente, uma progressão aritmética de coeficientes.

6.1.1 O projeto

Nosso primeiro objetivo, neste capítulo, é o de validar as operações que fizemos para escalar matrizes, a *semelhança* entre matrizes. Depois vamos discutir de forma mais ampla a *equivalência* entre matrizes.

Definição 29 *Semelhança entre matrizes*

Duas matrizes se dizem semelhantes,

$$\mathcal{A} \approx \mathcal{B}$$

se e somente se os sistemas de equações lineares ,

$$\mathcal{A}x = b ; \mathcal{B}x' = b'$$

tem as mesmas soluções, a menos de um isoformismo, uma matriz inversível, não singular que transforme

$$(x, b) \implies (x', b').$$

Mas, colocado nos termos acima existe uma seguinte dificuldade operacional, veja que podemos fazer operações à esquerda com as matrizes do sistema:

$$\mathcal{A}x = b \equiv \mathcal{M}\mathcal{A}x = \mathcal{M}b$$

porém não podemos alterar *facilmente* a matriz \mathcal{A} com operações à direita. Uma saída para esta dificuldade vai ser elaborada em dos itens do *laboratório*. Esta *dificuldade* vai ser o gancho em que nos iremos apoiar para discutir uma forma mais aprofundada de *equivalência entre matrizes*.

6.1.2 Semelhança entre matrizes

Nas próximas sessões de *laboratório* vamos nos dedicar aos vários tipos de semelhança entre matrizes e sistemas lineares.

Laboratório 17 Operações linha ou coluna com matrizes

Use `scilab` para executar as experiências aqui descritas. Onde abaixo estiver escrito uma matriz qualquer, despreze o excesso de generalidade dos autores e use matrizes 3×3 e procure se convencer que funciona para matrizes quaisquer...

1. Permutação de linhas ou colunas de uma matriz

- Considere a matriz identidade e permuta as suas duas primeiras linhas obtendo a matriz U .
- Verifique que o resultado será o mesmo se você permutar as duas primeiras colunas.
- Permuta agora três linhas da matriz identidade obtendo assim a matriz U veja que o mesmo se dá, relativamente as colunas, na matriz U^t . Com `scilab`

```
-->U
U =

!  0.  0.  1. !
!  1.  0.  0. !
!  0.  1.  0. !
```

```
-->U'
ans =

!  0.  1.  0. !
!  0.  0.  1. !
!  1.  0.  0. !
```

- Defina uma matriz A qualquer, por exemplo, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, mas com a mesma dimensão da matriz identidade que você tiver escolhido. Efetue as operações:

$$UA ; AU^t$$

e registre qual das operações permutou (1) as linhas ou (2) as colunas de A .

Resposta: a multiplicação à direita, por U , permuta as linhas de A , e a multiplicação à esquerda, por U^t , induz a mesma permutação sobre as colunas de A .

2. Soma de linhas, soma de colunas

Convenção: Vamos designar as linhas de uma matriz por L_i , a linha de ordem i . Uma expressão como

$$aL_i + bL_j \longrightarrow L_k$$

significando que fizemos a combinação linear das linhas L_i, L_j e o resultado foi colocado em lugar da linha L_k . Considere a matriz identidade e execute

$$L_1 + L_2 \rightarrow L_2$$

obtendo a matriz U . Defina uma matriz A qualquer, mas com a mesma dimensão da matriz identidade que você tiver escolhido.

- (a) Multiplique UA e AU^t registrando o que ocorreu.
- (b) Retome a matriz U igual a identidade, agora executando nela

$$3L_{n-1} - 4L_n \rightarrow L_{n-1}$$

Efetue as multiplicações UA e AU^t registrando o que ocorreu.

Resposta: A multiplicação à direita efetua em A uma operação sobre as linhas e a multiplicação à esquerda, com a matriz transposta, efetua em A a mesma operação, porém sobre as colunas. Convenção:

$$a * C_j + b * C_k \rightarrow C_k$$

representa a combinação linear das colunas de índices j, k substituindo, com este resultado, a coluna C_k .

3. Operações inversas Defina as duas matrizes abaixo, a partir da matriz identidade:

- $U : L_1 + L_2 \rightarrow L_2$
- $W : L_2 - L_1 \rightarrow L_2$

Considere uma matriz arbitrária A , mas com a mesma dimensão da matriz identidade que você tiver escolhido. Efetue as operações, nesta ordem, e registre o resultado:

- $C = UA ; WC$
- $C = AU ; CW$
- $UW ; WU$

Resposta: A matriz W inverte a operação que U tiver feito, à esquerda, com as linhas. O mesmo acontece com as matrizes W^t, U^t relativamente as colunas, quando multiplicadas à direita.

W, U é um par de matrizes inversas. Da mesma forma W^t, U^t é um par de matrizes inversas. Se você multiplicar $W^t U^t$ ou $U^t W^t$ o resultado será a identidade. Veja os cálculos feitos em `scilab`:

```
// definindo as matrizes A, U, W
```

```
-->A = [1,2,3;4,5,6;7,8,9]
```

A =

```
! 1.  2.  3. !
! 4.  5.  6. !
! 7.  8.  9. !
```

-->U = [1,0,0;1,1,0;0,0,1]

U =

```
! 1.  0.  0. !
! 1.  1.  0. !
! 0.  0.  1. !
```

-->W = [1,0,0;-1,1,0;0,0,1]

W =

```
! 1.  0.  0. !
! -1. 1.  0. !
! 0.  0.  1. !
```

// Testando: U,W inversas uma da outra

-->U*W

ans =

```
! 1.  0.  0. !
! 0.  1.  0. !
! 0.  0.  1. !
```

-->W*U

ans =

```
! 1.  0.  0. !
! 0.  1.  0. !
! 0.  0.  1. !
```

// W desfaz a operacao feita por U

-->C=U*A

C =

```
! 1.  2.  3. !
! 5.  7.  9. !
! 7.  8.  9. !
```

```

-->W*C
ans =

! 1.  2.  3. !
! 4.  5.  6. !
! 7.  8.  9. !
-->U'
ans =

! 1.  1.  0. !
! 0.  1.  0. !
! 0.  0.  1. !

-->W'
ans =

! 1.  -1.  0. !
! 0.  1.  0. !
! 0.  0.  1. !

-->A = [1,2,3;4,5,6;7,8,9]
A =

! 1.  2.  3. !
! 4.  5.  6. !
! 7.  8.  9. !

-->A*U'
ans =

! 1.  3.  3. !
! 4.  9.  6. !
! 7.  15.  9. !

-->A*U'*W'
ans =

! 1.  2.  3. !
! 4.  5.  6. ! = A
! 7.  8.  9. !

```

4. Justifique cada linhas na seguinte sequência de operações com o sistema de equações $Ax = b$

$$Ax = b \quad (6.8)$$

$$\mathcal{T}\mathcal{A}x = \mathcal{T}b \quad (6.9)$$

$$\mathcal{T}\mathcal{A}(\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T})x = \mathcal{T}b \quad (6.10)$$

$$\mathcal{B}y = c \quad (6.11)$$

Ver o diagrama (fig. 5.1) página 132.

Na próxima sessão de *laboratório* vamos mostrar como você pode memorizar operações linhas feitas sobre uma matriz, que será muito mais útil do que primeiro efetuar estas operações com a identidade.

Você deve usar **scilab** para agilizar o seu trabalho. Se você quiser limpar a memória do **scilab**, use o botão **control**, quando cair o menu, selecione *restart* e **scilab** vai esquecer todas as matrizes que você tiver definido anteriormente. Mas, mesmo depois de ter reiniciado, você pode usar a seta para cima afim de repetir alguma definição já feita anteriormente. Experimente com **scilab** para ver o que queremos dizer.

Laboratório 18 *Memorização de operações Relembrando a convenção, L_i significa a linha de ordem i de uma matriz qualquer. O sinal $-- >$ significa, “coloque no lugar de”. Assim*

$$a_{21}L_1 + a_{11}L_2 -- > L_2$$

significa que você deve:

1. Multiplicar a primeira linha por a_{21} ;
2. Multiplicar a segunda linha por a_{11} ;
3. somar as linhas assim resultantes e colocar o resultado em lugar da “segunda linha”

1. Composição de operações Considere a matriz $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ e a matriz \mathcal{I} identidade de mesma dimensão que \mathcal{A} .

(a) Em **scilab** defina \mathcal{U}_1 com as operações (permutação de linhas)

$$L_1 -- > L_2 -- > L_1$$

e calcule (com **scilab**)

$$\mathcal{U}_1\mathcal{A}.$$

(b) Em **scilab** defina \mathcal{U}_2 com as operações (permutação de linhas)

$$L_3 -- > L_2 -- > L_3$$

e calcule (com **scilab**)

$$\mathcal{U}_2\mathcal{U}_1\mathcal{A}.$$

(c) Calcule (com `scilab`)

$$\mathcal{U}_2\mathcal{U}_1\mathcal{A} ; \mathcal{U}_1\mathcal{U}_2\mathcal{A}$$

(d) Escolha as alternativas corretas (duas):

i. $\mathcal{U}_2\mathcal{U}_1\mathcal{A}$ permuta as linhas de \mathcal{A} efetuando

$$L_1 \text{ -- } > L_2 \text{ -- } > L_3 \text{ -- } > L_1$$

ii. $\mathcal{U}_2\mathcal{U}_1\mathcal{A}$ permuta as linhas de \mathcal{A} efetuando

$$L_1 \text{ -- } > L_3 \text{ -- } > L_2 \text{ -- } > L_1$$

iii. $\mathcal{U}_2\mathcal{U}_1$ é a composta das duas permutações

$$L_1 \text{ -- } > L_2 \text{ -- } > L_1, L_2 \text{ -- } > L_3 \text{ -- } > L_2$$

nesta ordem.

iv. $\mathcal{U}_2\mathcal{U}_1$ é a composta de das duas permutações

$$L_2 \text{ -- } > L_3 \text{ -- } > L_2, L_2 \text{ -- } > L_1 \text{ -- } > L_2$$

nesta ordem.

Resposta: Corretas (i), (ii), (iii)

2. Operações-linha Considere o esquema matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

em que você pode identificar a matriz identidade e a matriz \mathcal{A} justapostas.

Execute (sobre todo o “esquema”), a junção das matrizes (\mathcal{A}) e identidade, as as seguintes operações, re-escrevendo um novo “esquema” depois de cada operação executada.

(a)

$$4 * L_1 - L_2 \text{ -- } > L_2$$

(b)

$$7 * L_1 - L_3 \text{ -- } > L_3$$

Em `scilab` basta apertar duas vezes a seta para cima e atualizar a matriz \mathcal{U} e voltar a multiplicar pela **matriz original**.

(c)

$$6 * L_2 - 3 * L_3 \text{ -- } > L_3$$

(d) Use a última operação, com troca de sinal, para verificar que não há unicidade de solução, quer dizer, você pode chegar ao esquema final

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(e) Verifique que a multiplicação das matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

produz a forma escalonada da matriz A .

(f) Escolha as opções corretas:

i. A matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$ é a composta das tres operações feitas, passo-a-passo sobre a matriz A .

ii. A matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$ é o produto das matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

nesta ordem.

iii. A matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$ é o produto das matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nesta ordem

iv. A matriz $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$ é a composta das operações efetuadas na matriz A e a multiplicação $\mathcal{M}A$ produz uma matriz escalonada.

Resposta: Corretas A,C,D. Em B, o erro, é a ordem como as matrizes estão sendo multiplicadas.

3. Escolha as alternativas corretas para completar a afirmação "As operações feitas sobre as matrizes U são ..."

(a) ... do tipo

$$aX + Y$$

em que X, Y são linhas (ou colunas) da matriz;

(b) ... do tipo

$$aX + Y - - > Z$$

em que X, Y, Z são linhas (ou colunas) da matriz e $Z \in \{X, Y\}$.

(c) ... do tipo

$$aX$$

em que X é uma linha (ou coluna) da matriz;

(d) ... inversíveis (tem uma operação inversa).

(e) ... tais que se Z for uma linha modificada na matriz U pela operação

$$aX + Y$$

em que X, Y são todas linhas ou colunas da matriz, então a operação $\frac{1}{a}(Z - Y)$ é a operação inversa.

(f) ... tais que se Z for a linha modificada na matriz U pela operação

$$aX + Y$$

em que $X, Y, Z \in \{X, Y\}$ são, ambas, linhas ou colunas da matriz, então a operação $\frac{1}{a}(Z - Y)$ é a operação inversa.

Resposta: Corretas ii, iv, vi.

4. Mudança de base

(a) Considere o sistema $T\vec{x} = \vec{b}$. Justifique por que a seguinte sequência lógica (e de operações) garante que ainda temos o mesmo sistema:

$$T\vec{x} = \vec{b} \equiv \mathcal{A}T\vec{x} = \mathcal{A}\vec{b} \equiv \quad (6.12)$$

$$\mathcal{A}T\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{A}\vec{b} \equiv \quad (6.13)$$

$$\equiv T'\vec{x}' = \vec{b}' \quad (6.14)$$

se a matriz \mathcal{A} for inversível (não singular).

(b) Considere que o sistema $T\vec{x}' = \vec{b}'$ foi modificado de um sistema original (mudança de base) sendo a matriz inversível (não singular) \mathcal{A} a matriz de mudança de base. Mostre qual das opções abaixo devolve o sistema primitivo:

i. $x = \mathcal{A}^{-1}x'$.

ii. $x = \mathcal{A}x'$.

iii. $x = \mathcal{A}^{-1}x'\mathcal{A}$.

Resposta: (i)

6.1.3 Discutindo as experiências do *laboratório*

Operações elementares

operações elementares-linha

operações elementares-coluna

As matrizes¹ que chamamos \mathcal{U} representam operação do tipo

$$aX + Y \rightarrow Z$$

em que X, Y são, ambas, linhas ou colunas de uma matriz. Esta operação tem sempre uma inversa que é

$$\frac{Z - Y}{a}$$

em que Z é a linha modificada. As duas equações acima são exatamente similares ao par de equações inversas, numéricas:

$$z = ax + y ; x = \frac{z - y}{a}$$

assim demonstramos o teorema

Teorema 33 *Operações-linha elementares*

As operações-linha são representáveis por matrizes inversíveis cujas inversas também são operações-linha.

Estamos usando a frase "operações-linha elementares" sem justificar o adjetivo.

Operação-linha é uma sucessão de operações elementares. E *operação elementar* é uma operação do tipo

1. do tipo

$$aX + bY \rightarrow Z$$

em que Z é uma das linhas X, Y ou

2. uma permutação de linhas.

o que, possivelmente, já ficou óbvio a partir do uso. Você já deve ter observado que estas operações não alteram um sistema de equações lineares cuja matriz for modificada por estas operações.

Estes dois tipos de operações são inversíveis, e conseqüentemente uma composição, de qualquer quantidade delas, será inversível também.

Matrizes que representam operações elementares

O laboratório nos sugeriu que estas operações podem ser representadas por uma matriz. Simulamos, com `scilab`, a representação das operações modificando, sucessivamente, a matriz identidade. Quando chegamos á matriz escalonada, o conjunto das operações está *memorizado* no produto de matrizes.

Embora tenhamos usado exemplos de matrizes 3 x 3 fica claro que a dimensão pode ser arbitrária:

$$aL_p + bL_q \rightarrow Z ; Z \in \{L_p, L_q\} ; p, q \leq n \quad (6.15)$$

$$\frac{-aL_p + L_q}{b} \rightarrow Z ; Z \in \{L_p, L_q\} ; p, q \leq n \quad (6.16)$$

¹esta não é uma notação padrão

é um par de operações inversas copiadas do par de equações numéricas inversas (pouco tradicionais)

$$ax + by \text{ -- } > z ; z \in \{x, y\} \quad (6.17)$$

$$\frac{-ax+y}{b} \text{ -- } > z ; z \in \{x, y\}. \quad (6.18)$$

O sinal $\text{-- } >$ muitas vezes é substituído pelo "recebe" da linguagem de programação `Pascal` e neste caso as equações numéricas se escreveriam assim

$$p, q \leq n \quad (6.19)$$

$$L_q := aL_p + bL_q \implies \quad (6.20)$$

$$L_q := -aL_p \implies \quad (6.21)$$

$$L_q := \frac{L_q}{b} \quad (6.22)$$

(21) e (22) é a seqüência de operações que inverte a primeira operação, feita na equação (20).

Usamos uma expressão *não definida*, "seqüência de operações" e é preciso tornar este conceito bem definido:

- Cada matriz \mathcal{U} que definimos acima, representa uma "operação", uma operação-linha.
- Multiplicamos, sucessivamente, (observe a ordem),

$$\dots \mathcal{U}_3 \mathcal{U}_2 \mathcal{U}_1$$

- As matrizes ao final são o resultado da multiplicação:

$$\mathcal{U}_n \dots \mathcal{U}_3 \mathcal{U}_2 \mathcal{U}_1 ; \mathcal{U}_n \dots \mathcal{U}_3 \mathcal{U}_2 \mathcal{U}_1 \mathcal{A}$$

- A "seqüência de operações" é o produto, (observe a ordem),

$$\mathcal{U}_n \dots \mathcal{U}_3 \mathcal{U}_2 \mathcal{U}_1.$$

Falamos *produto de matrizes* porque a matriz que se encontra à esquerda foi sucessivamente modificada,

$$\mathcal{U}_1 \mathcal{A} \quad (6.23)$$

$$\mathcal{U}_2 \mathcal{U}_1 \mathcal{A} \quad \mathcal{U}_3 \mathcal{U}_2 \mathcal{U}_1 \mathcal{A} \quad (6.24)$$

$$\mathcal{U}_n \dots \mathcal{U}_3 \mathcal{U}_2 \mathcal{U}_1 \mathcal{A} \quad (6.25)$$

foi sendo multiplicada à esquerda pela matriz identidade modificada, veja abaixo as operações feitas com `scilab`

```
A =
!  1.   2.   3. !
```

```
! 4. 5. 6. !
! 7. 8. 9. !
```

U1 =

```
! 1. 0. 0. !
! 4. -1. 0. !
! 0. 0. 1. !
```

-->U1*A

ans =

```
! 1. 2. 3. !
! 0. 3. 6. !
! 7. 8. 9. !
```

-->U2*U1*A

ans =

```
! 1. 2. 3. !
! 0. 3. 6. !
! 0. 6. 12. !
```

-->U3*U2*U1*A

ans =

```
! 1. 2. 3. !
! 0. 3. 6. !
! 0. 0. 0. !
```

em que $U1, U2, U3$ é cada uma das operações elementares-linha efetuada, sucessivamente sobre a matriz A .

Escalonamento de matrizes

Isto sugere

Teorema 34 *Escalonamento de matrizes*

Dada uma matriz $n \times n$ qualquer, cada uma das operações elementares é uma operação inversível, portanto o escalonamento sendo um produto de operações inversíveis, é uma operação inversível.

Uma formulação equivalente deste teorema é

Teorema 35 *Escalonamento de matrizes*

Dada uma matriz T , $n \times n$, qualquer, existe uma matriz inversível A tal que

$$AT$$

é uma matriz escalonada, triangular superior.

Laboratório 19 Escalonamento e resolução de sistemas

1. Escalone o sistema $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, memorize as operações na matriz identidade, e determine a matriz A que transforma o sistema primitivo no sistema com matriz escalonada.

2. Escalone a matriz do sistema $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ e discuta se ele tem solução.

3. Escalone a matriz do sistema $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e discuta se o sistema solução e compare com a solução do sistema anterior.

4. Discuta o sistema linear $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

5. Escalone o sistema $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ e memorize na matriz identidade as operações feitas de modo a ter ao final a matriz A que efetua o conjunto das operações feitas. Discuta o sistema.

6. Mostre que, se T for uma matriz simétrica, existe um matriz A tal que ATA^{-1} é uma matriz diagonal.

7. sistemas equivalentes Considere o sistema $Tx = b$. Prove algebricamente que, se

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

for uma solução do sistema e se A for inversível então o \vec{v} é solução do sistema

$$ATx = Ab.$$

Definição 30 *Sistemas lineares equivalentes* Diremos que dois sistemas de equações lineares

$$Tx = b, My = c$$

são equivalentes, se houver uma matriz inversível A tal que

$$AT = M ; Ab = c$$

As matrizes T, M se dizem semelhantes .

8. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Encontre a solução geral deste sistema.

9. não unicidade do escalonamento Considere o sistema de equações

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (6.26)$$

Verifique que podemos obter

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (6.27)$$

ou a forma escalonada reduzida

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (6.28)$$

e verifique que ambos os casos (não podia ser diferente...) a solução é

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t ; t \in \mathbf{R} \quad (6.29)$$

A conclusão final, dos experimentos do *laboratório*, é:

Dada uma matriz A

- as operações-linha permitem-nos de sucessivamente anular todos os elementos que se encontram abaixo da diagonal.
- cada operação-linha elementar é representada por uma operação-linha elementar efetuada na matriz *identidade*
- a sequência de operações-linha elementares corresponde a um produto de matrizes à esquerda. O produto destas matrizes *memoriza* todas as operações-linha numa matriz que chamamos \mathcal{M} .
- $\mathcal{M}\mathcal{A}$ é uma matriz escalonada superior, tem zero em todas as entradas abaixo da diagonal principal.
- O escalonamento não é único, podemos escalonar de muitas maneiras diferentes, mas a solução tem que ser a mesma porque o sistema não foi alterado. As matrizes *inicial* e *final* são semelhantes, porque os sistemas são equivalentes.
- de forma absolutamente análoga temos as operações-coluna de modo que podemos resumir dizendo que o conjunto das operações-coluna fica memorizado numa matriz \mathcal{N}
- $\mathcal{A}\mathcal{N}$ é uma matriz escalonada inferior, tem zero em todas as entradas acima da diagonal principal.
- Se a matriz \mathcal{A} for simétrica (simétrica em torno da diagonal), quer dizer, $\mathcal{A} = \mathcal{A}^t$ então podemos executar aos pares cada operação-linha com a equivalente operação-coluna o que nos levará a uma *matriz diagonal*, uma matriz de valores próprios que é um resultado que anunciamos no capítulo 5.

Teorema 36 *Matriz de autovalores Toda matriz simétrica pode ser diagonalizável.*

Dem: Considere a matriz simétrica A

- as operações elementares-linha podem anular todos os elementos abaixo da diagonal principal;
- cada operação elementar-linha é representada pela multiplicação à esquerda por uma matriz na qual foi efetuada a operação elementar-linha, que vamos chamar de matriz elementar;
- as matrizes elementares efetuam a mesma operação elementar-coluna quando multiplicadas à direita;
- Consideremos então a sequência finita

$$\mathcal{M}_k, \dots, \mathcal{M}_1$$

que anulam passo-a-passo as entradas abaixo da diagonal principal.

- Pela simetria, o produto

$$B = \mathcal{M}_k \cdots \mathcal{M}_1 A \mathcal{M}_1 \cdots \mathcal{M}_k$$

anulam todas as entradas de A abaixo e acima da diagonal principal, portanto B é uma matriz diagonal.

q.e.d.

Exercícios 8 Operações elementares linha

1. Resolva o sistema de equações

$$\begin{pmatrix} 18 & -6 & -6 & 0 \\ -6 & 12 & 0 & -6 \\ -6 & 0 & 12 & -6 \\ 0 & -6 & -6 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.30)$$

2.

3.

4.

6.2 Matrizes singulares e não singulares

Já definimos, na página 61 o que é matriz *não singular*, a que tem inversa.

Uma matriz é *não singular*, ou *inversível*, se for quadrada, e se houver uma matriz \mathcal{B} da mesma dimensão que \mathcal{A} tal que $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{I}$ em que \mathcal{I} é a matriz identidade da mesma dimensão que \mathcal{A} .

O *experimento de laboratório* (ex. 4b), na página 147, mostra como se utilizam matrizes inversíveis para alterar a base de um espaço vetorial com o objetivo de obter uma matriz mais simples para um sistema de equações.

A próxima sessão de *laboratório* tem o objetivo de fixar estas idéias.

Laboratório 20 Sistemas equivalentes

1. Verifique por cálculo direto qual das matrizes seguintes

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

tem inversa, (é não singular).

Resposta Apenas a terceira, $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$, é uma matriz singular.

2. inversão passo-a-passo de uma matriz

Observação 14 *Memorização de operações.* Ao efetuar uma multiplicação na matriz quadrada \mathcal{T} podemos memorizar esta operação fazendo a mesma multiplicação na matriz identidade. O resultado desta memorização é uma matriz inversível, a matriz de passagem.

$$\begin{array}{cc} \mathcal{M}_1\mathcal{I} & \mathcal{M}_1\mathcal{T} \\ \mathcal{M}_2\mathcal{M}_1\mathcal{I} & \mathcal{M}_2\mathcal{M}_1\mathcal{T} \\ \mathcal{M}_n \cdots \mathcal{M}_2\mathcal{M}_1\mathcal{I} & \mathcal{M}_n \cdots \mathcal{M}_2\mathcal{M}_1\mathcal{T} \\ \mathcal{M}\mathcal{I} & \mathcal{M}\mathcal{T} \end{array}$$

Em cada uma das linhas acima temos, sucessivamente, o produto de matrizes \mathcal{M}_i operando de um lado sobre a identidade e do outro sobre T .

Na última linha temos a matriz \mathcal{M} que memoriza o produto das matrizes \mathcal{M}_i efetuado sobre T .

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_n \cdots \mathcal{M}_2 \mathcal{M}_1. \quad (6.31)$$

Algumas vezes este método produz a inversa de uma matriz T , se ela for inversível, se na última linha tivermos

$$\mathcal{M}T = I \quad (6.32)$$

mas isto é pouco provável e portanto não tem interesse como método para inversão de matrizes, o real interesse no método é que ele irá indicar se a matriz é ou não é inversível. O próximo exercício ilustra a aplicação do método.

Nós veremos, posteriormente, uma variante deste método que constrói a inversa de uma matriz, se ela for não singular. A idéia, aqui, é a da triangularização de uma matriz.

- Multiplique a matriz $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, a esquerda, pela matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$ verificando que o resultado é o anulamento do segundo elemento da primeira coluna.
- Multiplique a matriz T assim resultante pela matriz $\mathcal{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1/1.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, resultando na matriz diagonal $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix}$.
- Descubra uma matriz diagonal \mathcal{M}_3 que multiplicada pela última matriz, resulte na identidade, (a inversa de $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix}$).
- A matriz que faz todo o trabalho, e memoriza as três operações efetuadas, é $\mathcal{M} = \mathcal{M}_3 \mathcal{M}_2 \mathcal{M}_1$. Verifique isto. Esta matriz-produto é também a matriz inversa da matriz original.

3. Calcule a inversa da matriz $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}$ usando o método descrito na questão anterior.

4. Verifique que a matriz $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ não tem inversa, devido a impossibilidade de aplicar o método de inversão passo a passo.

5. Solução de um sistema de equações.

(a) Considere a equação linear $T\vec{X} = B \equiv \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}$. Encontre uma matriz \mathcal{M} , não singular, tal que a nova equação linear $\mathcal{M} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ seja algebricamente idêntica à anterior e a nova matriz seja diagonal.

(b) Resolva a nova equação linear, e verifique, testando a solução na anterior, que ela é solução da equação linear antiga.

No laboratório chegamos à conclusão de que algumas matrizes tem inversas, mas que existem as *matrizes singulares*...

O método desenvolvido mostra que podemos encontrar matrizes equivalentes, no formato triangular e uma nebulosa noção de *determinante*² foi sendo implantada, que para as matrizes triangulares, é o produto dos elementos da diagonal. Mas não estamos em condição de provar que

Teorema 37 Produto de determinantes

O determinante do produto de matrizes é o produto dos determinantes:

$$\det(MT) = \det(M)\det(T) = \det(A) \iff MT = A$$

e que assim o determinante da matriz triangular é diferente de zero sempre que determinante da matriz do sistema de equações originais o for, *mas isto é verdade*. Este é um elo que ficará faltando na teoria desenvolvida neste livro.

Precisamos fundamentar os fatos do laboratório, provar que o método de triangularização é *universal*, isto é, se aplica a todas as matrizes quadradas. Vamos redigir a demonstração com o *sabor* de um programa de computação, ou como ainda se diz, numa *linguagem algorítmica*.

Consideremos, para isto, uma matriz $n \times n$ arbitrária.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (6.33)$$

Hipótese 1 $a_{11} \neq 0$ Consideremos por hipótese que $a_{11} \neq 0$

Vejamos que sempre será possível, a menos de alterações na matriz que produzam um sistema equações equivalentes, e, é esta equivalência, que nos interessa:

- Se $a_{11} = 0$ mas algum outro elemento da primeira linha for diferente de zero, podemos trocar as colunas da matriz de modo que o “novo” a_{11} seja diferente de zero. Isto na prática corresponde a troca da ordem das “variáveis” x_1, \dots, x_n do sistema portanto não altera o significado do sistema de equações;
- Se a primeira linha for toda nula, e houver alguma linha que não o seja, podemos levar esta linha não nula para o primeiro lugar, troca de linhas,

corresponde a troca na ordem das coordenadas do vetor de dados $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$

e portanto não altera o significado do sistema de equações.

²Neste livro não definiremos o determinante de uma matriz, porque não precisaremos diretamente deste conceito.

- Se nada disto for possível temos um sistema nulo, uma matriz nula, que é uma matriz triangular superior, como queremos. Voltaremos a discussão sobre sistemas nulas ao final.

Isto prova a *consistência de nossa hipótese*, fora do caso do sistema nulo que foi discutido sumariamente acima. Este é o primeiro passo num programa para resolver sistemas lineares, identificar se $a_{11} \neq 0$ e, não sendo, produzir as permutações de linhas ou colunas mencionadas acima.

Vamos adotar uma técnica que não empregamos no laboratório porque para as contas feitas manualmente ela representa um complicante, mas ela é excelente na implementação de programas para resolver sistemas de equações. É nossa segunda hipótese

Hipótese 2 $a_{11} = 1$

Se a hipótese não for verdadeira vamos dividir a primeira linha por a_{11} de modo a torná-la verdadeira, (inclusive o primeiro elemento do vetor de dados) e conseqüentemente ainda teremos um *sistema equações equivalente* ao primitivo.

Observação 15 *Notação computacional*

Observe que estamos usando o método algorítmico da computação.

Onde escrevemos a_{ij} deveríamos estar escrevendo

$$a'_{ij}, \dots, a'''_{ij}$$

porque a cada passagem estamos substituindo os elementos da matriz por outros obtidos por combinações lineares.

Num programa de computação isto se faz simplesmente com o comando “=” que nada tem a ver com o teste lógico-matemático “=”. Em boa matemática clássica se usava com frequência a frase, “fazendo $A = B$ ” que equivale ao comando “ $A = B$ ” da computação em que, a partir do ponto em que se escreve esta linha, A passa a ter o valor que for avaliado para B .

Não é atôa que anunciamos que este texto é de Matemática com apoio computacional...

Vamos agora nos referir às linhas da matriz como os vetores-linha \mathbf{a}_i e sucessivamente, a partir da segunda linha da matriz, vamos fazer a substituição:

$$\mathbf{a}_i = a_{i1}\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_i ; \quad c_i = a_{i1}c_1 - c_i \quad (6.34)$$

verifique que isto substitue a linha de ordem i por uma linha que lhe é equivalente, do ponto de vista de sistema de equações. Na nova linha o primeiro elemento é nulo: *substituímos uma equação pela soma de duas equações*, isto não altera o sistema de equações.

E agora iteramos o processo iniciando com a segunda linha:

- a_{22} o segundo elemento da segunda linha deve ser igual a 1 elemento;

- $a_{22} = 1$ aplicamos a segunda hipótese
- com a segunda linha anulamos todos os segundos elementos das demais linhas abaixo da segunda.
- isto será possível a menos que a matriz a partir da segunda coluna já seja totalmente nula o que reduz o sistema a primeira linha, ou às primeiras para as quais conseguimos aplicar o processo.

Isto prova que sempre poderemos, com combinação linear de linhas, e depois de $n(n-1)$ operações (sem contar com as somas e multiplicações ...), transformar uma matriz \mathcal{A} em uma matriz triangular superior \mathcal{T} . Isto resumamos na observação 14, página 154.

Com a segunda hipótese facilmente escrevemos, nos programas, a solução das equações. No trabalho manual vamos evitá-la.

Sistemas cuja matriz seja nula

Num tal sistema, em que a matriz é nula, a solução é o espaço inteiro, no caso homogêneo. Em particular a matriz é triangular superior, como já observamos e portanto a técnica desenvolvida no *laboratório* se aplica.

6.3 Mudança de base e mudança de matriz

Nos cursos de Geometria Analítica se estuda a *mudança de referencial* que fica muitas vezes pouco clara, no seu objetivo. Aqui teremos uma forma de retomar esta técnica num contexto que irá mostrar a sua importância: *pode existir* uma base para o espaço vetorial em que a *matriz de uma transformação linear* fica muito simples. Vamos, inicialmente, estudar um tipo de simplificação caracterizada pelas palavras-chave *autovetor* e *autovalor*, usaremos esta forma simplificada para discutir outras formas simplificadas para as matrizes. A mudança de base é a mudança de referencial.

Introduzimos os conceitos

- *sistemas equivalentes* ;
- *matrizes equivalentes* do ponto de vista do sistema de equações que elas representam (ou podem representar);

que ficou caracterizado pela equação

$$\mathcal{T}x = b \equiv \mathcal{A}x = \mathcal{A}b = b' ; \mathcal{A} = \mathcal{M}\mathcal{T} \quad (6.35)$$

e denominamos a matriz inversível \mathcal{M} que memorizou as transformações das operações-linha de *matriz de passagem* entre os dois sistemas equivalentes, o novo e o velho.

Mas na equação acima tem um erro visível que é preciso corrigir, sem comentários, correta, a equação fica:

$$Tx = b \equiv Ax' = Ab = b' ; A = MT \quad (6.36)$$

porque a solução que iremos encontrar para o sistema, não é exatamente a original. A matriz das variáveis, possivelmente, foi alterada... Muitas vezes este fato passa despercebido, outras vezes ele representa uma modificação que precisa ser *desfeita* para que a resposta se coloque no “formato original do problema”.

Lembre-se que as matrizes representam transformações “geométricas do espaço de saída para o espaço de chegada, rotações, homotetias, ou achatamentos violentos, levando espaços inteiros a se concentrarem em espaços de dimensão menor, (e o caso em que a *liberdade* da matriz é grande, maior do que 1).

Claro, agora estamos nos referindo à matriz de passagem \mathcal{M} que é inversível, por construção (ainda não mostramos isto) e portanto $Ker(\mathcal{M}) = \{0\}$. Isto é necessário para que os sistemas, o novo e o velho, sejam equivalentes.

Então o que encontramos foi x' e não x . Na linguagem dos espaços vetoriais o que houve foi uma *mudança de base*. Vamos tornar estas idéias mais concretas no próximo *laboratório*.

Laboratório 21 Mudanças de base

1. Escalone o sistema $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, memorize as operações na matriz identidade, e determine a matriz A que transforma o sistema primitivo no sistema com matriz escalonada.

2. Escalone a matriz do sistema $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ e discuta se ele tem solução.

3. Escalone a matriz do sistema $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e discuta se o sistema solução e compare com a solução do sistema anterior.

4. Discuta o sistema linear $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

5. Escalone o sistema $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ e memorize na matriz identidade as operações feitas de modo a ter ao final a matriz A que efetua o conjunto das operações feitas. Discuta o sistema.

6. Mostre que, se T for uma matriz simétrica, existe um matriz A tal que ATA^{-1} é uma matriz diagonal .

Parte III

Solução dos exercícios

Capítulo 7

Soluções dos exercícios

7.1 Propriedades das funções lineares afins

1. (ex. 1, página 53) Listagem das propriedades das funções lineares afins

- (a) função linear associada Se f for uma função *linear afim* então existe uma função linear g , chamada *associada*, e uma matriz constante \mathcal{B} tal que

$$f(X) = g(X) + \mathcal{B} \equiv f(X) - \mathcal{B} = g(X)$$

Dem: Pela definição de função linear afim **q.e.d.**

- (b) imagem de combinações lineares As funções lineares afins transformam *combinações lineares* em translações de *combinações lineares*.

Dem: $f(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) - \mathcal{B}$ é a função linear g associada, então

$$g(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) = \lambda_1 g(X_1) + \lambda_2 g(X_2) \quad (7.1)$$

$$f(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) - \mathcal{B} = \lambda_1 g(X_1) + \lambda_2 g(X_2) \quad (7.2)$$

$$f(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) = \lambda_1 g(X_1) + \lambda_2 g(X_2) + \mathcal{B} \quad (7.3)$$

$$(7.4)$$

q.e.d.

- (c) As funções lineares afins *preservam combinações lineares* a menos de uma translação.

Dem: é uma reformulação da propriedade anterior. **q.e.d.**

- (d) As funções lineares afins *transformam segmentos de reta em segmentos de reta*

Dem: Considere um segmento de reta \overline{PQ} . A imagem por f de \overline{PQ} é

$$f(\overline{PQ}) = g(\overline{PQ}) + \mathcal{B}$$

mas como g é linear, $g(\overline{PQ})$ é um segmento de reta e \mathcal{B} é a "matriz translação", portanto a translação, por \mathcal{B} de um segmento de reta, outro segmento de reta.

q.e.d.

2. (ex. 2, página 53)

$0 = x - x$ para um vetor x qualquer, logo, se f for linear:

$$f(0) = f(x - x) = f(x) - f(x) = 0$$

3. (ex. 3, página 53)

Se f for linear afim, então existe uma função linear associada g tal que $f(X) = g(X) + \mathcal{B}$.

$$f(0) = g(0) + \mathcal{B} = 0 \longrightarrow f(0) = \mathcal{B} = 0$$

o termo independente \mathcal{B} é zero.

4. (ex. 4, página 53)

Dem: Considere uma função linear afim f e a função linear g que lhe é associada.

Pelo item anterior do *laboratório*, a imagem dos lados do polígono, são segmentos de reta formando uma poligonal fechada.

A convexidade: Considere um segmento \overline{PQ} no interior do polígono-pre-imagem. A imagem $f(\overline{PQ})$ é outro segmento de reta. Resta apenas saber se $f(\overline{PQ})$ está no interior da imagem do polígono. Vamos resolver esta questão num caso particular, quando o polígono for plano.

Seja Ω o polígono cuja imagem queremos calcular e $f(\Omega)$ a sua imagem. Seja $P \in \Omega$ e vamos calcular o índice de $f(P)$ relativamente a imagem da fronteira do polígono, $f(\partial\Omega)$. Como f é uma *mudança de variável* e o seu determinante pode ser nulo, então é melhor partir do índice de P relativamente a curva $\partial\Omega$:

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{dz}{z-P} \tag{7.5}$$

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{f(\partial\Omega)} \frac{dw \det(J(f))}{w-f(P)} \tag{7.6}$$

$$w = f(z) \tag{7.7}$$

$$\tag{7.8}$$

Vemos que se o $\det(J(f)) \neq 0$ então a integral no segundo membro tem que ser diferente de zero e assim o índice de $f(P)$ relativamente à curva $f(\partial\Omega)$ é não nulo o que mostra que $f(P)$ é um ponto interior da image, se P for ponto interior da pre-imagem.

q.e.d .

5. (ex. 5, página 53)

Porque a imagem de uma função linear afim é uma translação, um movimento rígido que não altera a semelhança dos polígonos.

7.2 Sistemas lineares - Solucao dos exercícios

1. (ex. 1, pag. 61)

Por definição, o momento de um corpo é sua massa pelo raio (comprimento do braço) que sustenta o corpo. Lendo o gráfico (fig. 2.3) página 62, temos o sistema de equações

$$\begin{cases} 40h + 15c & = 2 * 50 = 100 \\ 25c & = 2 * 25 + 50h = 50 + 50h \end{cases} \quad (7.9)$$

$$\begin{cases} 40h + 15c & = 100 \\ 25c & = 50 + 50h \end{cases} \quad (7.10)$$

$$\begin{pmatrix} 40 & 15 \\ 50 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

Cuja solução com *octave* é

```
octave:1> a = [40,15;-50,25]
```

```
a =
```

```
40 15
-50 25
```

```
octave:2> b = [100;50]
```

```
b =
```

```
100
50
```

```
octave:3> a\b
```

```
ans =
```

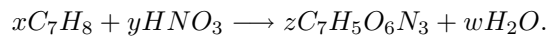
```
1
4
```

h= 1; c = 4

As duas outras massas são 1.00kg, 4.00Kg.

2. (ex. 8, pag. 61)

Aplicando o princípio do equilíbrio dos átomos antes e depois de uma reação química aos componentes C, H, N, O



temos o sistema (estamos comparando as quantidade de átomos por substância, em cada uma das equações)

$$\begin{cases} 7x & = 7z \\ 8x + y & = 5z + 2w \\ y & = 3z \\ 3y & = 6z + w \end{cases} \quad (7.12)$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & -7 & 0 \\ 8 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.13)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.14)$$

em que na última linha a matriz do sistema foi escalonada (você pode encontrar resultados diferentes, mas equivalentes).

Resolvendo as equações, a partir da última, temos:

$$w = 3z; y = 3z; x = 3z$$

o que nos dá as equações paramétricas

$$(z, 3z, z, 3z)$$

para a reta, *espaço vetorial de dimensão 1*, núcleo da transformação linear representada pela matriz, solução do sistema homogêneo.

3. (ex. 3 , página 62)

```
-->function u = f(x)
-->y = x
-->u(1) = fix(y/50)
-->y = y - u(1)*50
-->u(2) = fix(y/20)
-->y = y - u(2)*20
-->u(3) = fix(y/10)
-->endfunction
```

```
-->f(70)
ans =
```

```
! 1. !
! 1. !
! 0. !
```

```
-->f(190)
ans =
```

```
! 3. !
! 2. !
! 0. !
```

```
-->f(230)
```

ans =

! 4. !
! 1. !
! 1. !

4.

5.

7.3 Estrutura do \mathbf{R}^2 - Solução dos exercícios

1. (ex. 5, página 69)

Considere o conjunto \mathcal{E} de todas as funções reais definidas no conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

(a) Prove que $(\mathcal{E}, +, \cdot)$ é um espaço vetorial real.

Considere $f \in \mathcal{E}$ e conseqüentemente

$$f(1), f(2), f(3), f(4), f(4)$$

são números reais. Defina uma função de

$$\mathcal{E} \xrightarrow{\Phi} \mathbf{R}^5$$

tal que

$$f(i) \mapsto x_i = f(i) ; x \in \mathbf{R}^5$$

Prove que

(a) Φ é linear

i. $\Phi(f + g) = \Phi(f) + \Phi(g)$

ii. $\Phi(\lambda f) = \lambda \Phi(f) ; \forall \lambda \in \mathbf{R}$

(b) $\Phi(0) = 0$ em que o argumento de Φ tem que ser a função zero (identicamente nula).

(c) $\Phi(f) = 0$ se e somente se $f = 0$

(d) Mostre que Φ é bijetiva.

(a) \mathcal{E} é um espaço vetorial. Temos mostrar que $(\mathcal{E}, +)$ é um grupo abeliano.

Dem: Primeiro temos que exibir o modo de somar os vetores f, g . Dadas duas funções f, g uma nova função, $H = f + g$ se define por

$$H(i) = f(i) + g(i) ; i \in \{1, 3, 3, 4, 5\}$$

- i. A associatividade da adição de números reais se transmite para a operação assim definida:

$$\forall i \ f(i) + (g(i) + h(i)) = (f(i) + g(i)) + h(i)$$

logo

$$f + (g + h) = (f + g) + h$$

- ii. A comutatividade da adição de números reais se transfere para a operação com demonstração semelhante a que fizemos acima para a associatividade.
 iii. Elemento neutro A função identicamente nula

$$0 : \{1, 2, 3, 4, 5\} \longrightarrow \mathbf{R} ; 0 : i \mapsto 0$$

somada a qualquer outra função f reproduz f sendo portanto o elemento neutro da adição de funções.

- (b) Inverso aditivo considere uma função f definida em $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ e defina a função

$$\forall i \ ff(i) = -f(i).$$

Temos

$$\forall i \ ff(i) + f(i) = -f(i) + f(i) = 0$$

e assim ff é o inverso aditivo da função f . Obviamente, em vez usar a notação ff vamos usar a notação “ $-f$ ” para a função inverso aditivo de f que existe para toda função do conjunto \mathcal{E} e assim $(\mathcal{E}, +)$ é um grupo abeliano. **q.e.d.**

Observação 16 *Dificuldades linguísticas e de comunicação*

Fica claro, na invenção que fizemos acima do nome ff para a função “ $-f$ ” para escrever um pedaço da demonstração, uma dificuldade de comunicação que permeia o ensino de Matemática. O leitor, ao ser exposto a um texto novo de Matemática, enfrenta a criação de novos objetos com o sentimento de que nós, os matemáticos, estamos criando complicações possivelmente inúteis. É difícil superar esta crise... estamos definindo novos objetos, os elementos do conjunto \mathcal{E} que são muito semelhantes a números reais, mas que não são números reais. A adição parece a a adição dos números reais mas é uma nova operação definida num novo conjunto.

No fundo o que se passa é a construção de novos objetos é feita com auxílio dos velhos... vamos continuar o processo.

Temos agora que demonstrar as propriedades do produto por escalar. *Primeiro* temos que definir o que é o “produto por um escalar”. Dada uma função f , definimos

$$[\lambda f](i) = \lambda f(i)$$

e queremos demonstrar que

- i. associatividade à esquerda

Por definição $[(\alpha\lambda)f](i) = (\alpha\lambda)f(i)$. À direita temos o número real “ $f(i)$ ”, para cada valor de $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ multiplicado pelo número real $(\alpha\lambda)$ e, propriedade dos números reais, isto é igual a

$$[(\alpha\lambda)f](i) = (\alpha\lambda)f(i) = \alpha(\lambda f(i))$$

A última expressão define a função $[\alpha(\lambda f)]$ para um valor qualquer de $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ logo

$$(\alpha\lambda)f = \alpha(\lambda f).$$

- ii. O elemento neutro da multiplicação não altera as funções por quem ele for multiplicado. O elemento neutro da multiplicação é a função identicamente 1:

$$\forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}; i \mapsto 1$$

Vamos chamar esta função de **1**. Temos

$$(\mathbf{1}f) : i \mapsto 1 \cdot f(i) = f(i)$$

provando o que queríamos, **1** não altera a função f .

- iii. O elemento neutro da adição anula qualquer função que for por ele multiplicada. De fato, chamemos

0

a função identicamente nula. Temos

$$(\mathbf{0}f) : i \mapsto 0 \cdot f(i) = 0$$

é a função identicamente nula.

- iv. distributividade da multiplicação por um escalar relativamente à adição. Queremos mostrar que

$$[f(g + h)] = [fg + fh]$$

De fato,

$$[f(g + h)] : i \mapsto f(i)(g(i) + h(i)) = f(i)g(i) + f(i)h(i)$$

que define a função $[fg + fh]$ provando a igualdade que queríamos provar.

Provamos assim que \mathcal{E} é um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais.

Vamos agora discutir as propriedades da função

$$\Phi\mathcal{E} \longrightarrow \mathbf{R}^5$$

Vamos adotar uma notação melhor do que a proposta no exercício:

$$f(i) \mapsto f_i = x_i$$

(a) linearidade

$$[f + g] : i \mapsto f(i) + g(i) = f_i + g_i \quad (7.15)$$

$$\text{logo } \Phi([f + g]) = \Phi([f]) + \Phi([g]) \quad (7.16)$$

$$[\lambda f] : i \mapsto \lambda f(i) \quad (7.17)$$

$$\text{logo } \Phi([\lambda f]) = \lambda \Phi([f]) \quad (7.18)$$

provando a linearidade.

(b) imagem da função identicamente nula, $\Phi(0)$ é a éupla com todas as coordenadas nulas, logo $\Phi(0) = (0, 0, 0, 0, 0)$

(c) imagem inversa do zero A única função que leva todo $i \in \{1, 3, 3, 4, 5\}$ em zero é a função identicamente nula, logo $\Phi(f) = 0 \Rightarrow f \equiv 0$.

(d) bijetividade Temos que demonstrar que Φ é injetiva e bijetiva:

i. injetividade Tome duas funções diferentes, $f \neq g$ então, para pelo menos um valor de $i \in \{1, 3, 3, 4, 5\}$ temos

$$f_i \neq g_i \equiv (f_1, f_2, f_3, f_4, f_i) \neq (g_1, g_2, g_3, g_4, g_i)$$

e portanto

$$\Phi(f) \neq \Phi(g)$$

ii. sobrejetividade Temos que mostrar que todo elemento de \mathbf{R}^5 tem uma imagem inversa (pré-imagem) via Φ . Mas qualquer éupla de \mathbf{R}^5 é um arranjo (possivelmente com repetição) dos elementos de \mathbf{R} tomados cinco a cinco, e portanto uma função do conjunto $\{1, 3, 3, 4, 5\}$ em \mathbf{R} que é a pré-imagem deste arranjo por Φ .

Moral da história, *o conjunto de todas as funções definidas num conjunto finito é equivalente ao conjunto das éuplas de números reais,*

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

sendo n o número de elementos do tal conjunto finito, domínio das funções. Isto é um exemplo de *isomorfismo*.

2.

7.4 Espaço vetorial - Solução de alguns exercícios

1. (ex. 1), página 86 Complete o conjunto

$$\mathcal{E} = \{1 + x, 1 + x^2, x^2 + x^5\}$$

para obter uma base para o espaço $\mathbf{R}_5[x]$ dos polinômios de grau menor ou igual a 5.

```

O-C-T-A-V-E
tarcisio@cap02:~/tex/alglin$ octave
GNU Octave, version 2.0.16.92 (i386-pc-linux-gnu).
Copyright (C) 1996, 1997, 1998, 1999, 2000 John W. Eaton.
This is free software with ABSOLUTELY NO WARRANTY.
For details, type `warranty'.

octave:1> a = [1,1,0,0,0,0;1,0,1,0,0,0;1,0,0,0,0,0;0,0,0,0,1,0;0,0,1,0,0,1;0,0,0,1,0,0]
a =
  1  1  0  0  0  0
  1  0  1  0  0  0
  1  0  0  0  0  0
  0  0  0  0  1  0
  0  0  1  0  0  1
  0  0  0  1  0  0

octave:2> det(a)
ans = 1
octave:3> █

```

Figura 7.1: Cálculo do determinante com octave

Solução 6

$$\{1, 1 + x, 1 + x^2, x^4, x^3, x^2 + x^5\}$$

Identificando um polinômio com seus coeficientes, este conjunto corresponde às enúplas

$$(1, 0, 0, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0, 1)$$

Com octave, podemos definir a matriz que tem estas linhas e calcular o determinante desta matriz, veja (fig. 7.1). Como o determinante é diferente de zero, então as linhas (e também as colunas da matriz) são l.i. portanto o conjunto de vetores é uma base para $\mathbf{R}_5[x]$.

2. ex. 2, página 86 Verifique se o conjunto dos polinômios de grau exatamente 5 é um espaço vetorial.

Solução 7 Não é um espaço vetorial. Falha na existência do elemento neutro para adição, o polinômio identicamente zero.

3. ex. 3, página 86 Verifique se o conjunto das funções reais definidas no conjunto $\{a, e, i, o, u\}$ é um espaço vetorial e encontre uma base para este espaço.

Solução 8 notação Considerando que o alfabeto tem uma ordem, podemos entender que as letras a, e, i, o, u estão ordenadas e identificar uma função definida neste conjunto por uma sequência (ordenada) de 5 números reais: $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ em que os números memorizam a ordem das letras:

$$a \mapsto 1; 3 \mapsto 2; i \mapsto 3; o \mapsto 4; u \mapsto 5$$

Dadas duas tais seqüências, podemos definir a adição ponto a ponto por:

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \quad (7.19)$$

$$y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) \quad (7.20)$$

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4, x_5 + y_5) \quad (7.21)$$

(a) elemento neutro para adição é a seqüência de zeros

$$(0, 0, 0, 0, 0).$$

(b) associatividade Dadas tres seqüências, X, Y, Z o valor em $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ de $X + (Y + Z)$ é

$$x_i + (y_i + z_i) = (x_i + y_i) + z_i$$

sendo a expressão à esquerda o valor de $(X + Y) + Z$ portanto

$$X + (Y + Z) = (X + Y) + Z.$$

(c) comutatividade Dadas duas seqüências, X, Y o valor em $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ de $x + y$ é

$$x_i + y_i = y_i + x_i$$

sendo a expressão à esquerda o valor de $y + x$ portanto

$$x + y = y + x.$$

(d) inverso aditivo Dada uma seqüência x a seqüência em que trocarmos todos os sinais dos valores de x

$$(-x_1, -x_2, -x_3, -x_4, -x_5)$$

quando somada a seqüência x vai produzir a seqüência nula, sendo portanto o inverso aditivo de x .

Provamos assim que o conjunto \mathcal{F} das funções definidas no conjunto $\{a, e, i, o, u\}$ com a adição ponto a ponto, é um grupo abeliano.

As propriedades da multiplicação por um escalar.

(a) a associatividade à esquerda Dados dois escalares α, λ e uma seüência \overline{X} ,

$$\alpha(\lambda X)$$

em cada ponto $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ está definida naturalmente por

$$\alpha(\lambda x_i)$$

mas agora temos o produto de tres números reais para os quais vale

$$(\alpha\lambda)x_i$$

que é o valor de

$$\alpha(\lambda X)$$

no ponto $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ portanto vale a associatividade à esquerda na multiplicação por escalares.

(b) o elemento neutro da multiplicação não não altera o multiplicando O elemento neutro aqui é o escalar $1 \in \mathbf{R}$ que multiplicado porque qualquer seüência X , reproduz esta.

(c) o elemento neutro da adição multiplicado por qualquer seüência X anula todas as coordenadas de X produzindo a seüência

$$(0, 0, 0, 0, 0)$$

que é o elemento neutro da adição de vetores.

(d) a distributividade da multiplicação por um escalar. Considere duas seüências X, Y e um escalar λ temos:

$$\lambda(x_i + y_i) = \lambda x_i + \lambda y_i$$

porque todos são números reais. À esquerda temos o valor de λ multiplicado por $X + Y$ em um ponto $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e à direita temos a soma dos valores de λX e λY no ponto $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ somados. Como sempre são iguais, para qualquer valor de i então

$$\lambda(X + Y) = \lambda X + \lambda Y$$

Vemos assim que o espaço \mathcal{F} das funções definidas no conjunto $\{a, e, i, o, u\}$ é um espaço vetorial. As funções

$$E = \{(1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$$

são l.i. As contas são semelhantes as que poderíamos fazer para os elementos do \mathbf{R}^5 . E como identificamos as funções a um elemento do \mathbf{R}^5 podemos usar esta identificação para verificar que uma função qualquer vai ser obtida por combinação linear desta funções do conjunto E que é então uma base para \mathcal{E} .

Solução 9 Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0 \\ -3x_1 - 4x_2 - 9x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0 \end{cases}$$

(a) Prove que o conjunto das soluções deste sistema de equações é um espaço vetorial. Considere duas soluções do sistema

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5).$$

Quer dizer que é verdade:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0 \\ -3x_1 - 4x_2 - 9x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0 \end{cases} \quad (7.22)$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 4y_4 + 5y_5 = 0 \\ -3y_1 - 4y_2 - 9y_3 + 2y_4 + y_5 = 0 \\ 2y_1 + 4y_2 + 6y_3 + 2y_4 + y_5 = 0 \\ 3y_1 + 6y_2 + 9y_3 + 8y_4 + 2y_5 = 0 \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 7y_4 + 9y_5 = 0 \end{cases} \quad (7.23)$$

Podemos somar estes “dois sistemas”, como somariamos duas equações lineares, linha a linha, respeitando a ordem dos índices. O resultado da soma é

$$\begin{cases} (x_1 + y_1) + 2(x_2 + y_2) + 3(x_3 + y_3) + 4(x_4 + y_4) + 5(x_5 + y_5) = 0 \\ -3(x_1 + y_1) - 4(x_2 + y_2) - 9(x_3 + y_3) + 2(x_4 + y_4) + (x_5 + y_5) = 0 \\ 2(x_1 + y_1) + 4(x_2 + y_2) + 6(x_3 + y_3) + 2(x_4 + y_4) + (x_5 + y_5) = 0 \\ 3(x_1 + y_1) + 6(x_2 + y_2) + 9(x_3 + y_3) + 8(x_4 + y_4) + 2(x_5 + y_5) = 0 \\ (x_1 + y_1) + 2(x_2 + y_2) + 3(x_3 + y_3) + 7(x_4 + y_4) + 9(x_5 + y_5) = 0 \end{cases}$$

sendo zero no segundo membro porque somamos primeiro membro com primeiro, segundo membro com segundo membro. Isto mostra que se os vetores X, Y forem solução do sistema homogêneo, também o vetor $X + Y$ é solução do sistema homogêneo. Quer dizer que o espaço de soluções é fechado para a soma de soluções.

Observação 17 Produto de matrizes - distributividade

A soma dos “dois sistemas” acima pode ser vista de um outro ângulo. Um “sistema de equações é um produto de matrizes:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0 \\ -3x_1 - 4x_2 - 9x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0 \end{cases} \quad (7.24)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -3 & -4 & -9 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 7 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}; c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix} \quad (7.25)$$

Se chamarmos a matriz de \mathcal{A} o produto de matrizes acima pode ainda ser escrito de forma mais compacta:

$$\mathcal{A}X = C$$

e como o sistema é homogêneo, o vetor de dados é $C = 0$.

Retornando agora a “soma dos sistemas”, com esta notação compacta, o que fizemos foi:

$$\mathcal{A}(X + Y) = B \equiv \mathcal{A}X + \mathcal{A}Y = B$$

que prova a distributividade do produto de matrizes pela soma de vetores (ou soma de matrizes). Quer dizer, demonstramos o teorema:

Teorema 38 *Distributividade do produto de matrizes com a adição*
 Seja \mathcal{A} uma matriz $n \times m$ e $X, Y \in \mathbf{R}^m$. O produto da matriz \mathcal{A} pela soma dos vetores $X + Y$ é distributivo

$$\mathcal{A}(X + Y) = \mathcal{A}X + \mathcal{A}Y$$

Vamos verificar as propriedades da adição de soluções

- i. Elemento neutro Uma solução deste sistema de equações é um vetor

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$

Como o sistema é homogêneo, a éntupla nula $(0, 0, 0, 0, 0)$ é solução, pelo teorema dos sistemas homogêneos.

- ii. Inverso aditivo Suponha que uma enúpla destas satisfaça à equação. Se multiplicarmos o sistema por -1 não o altera (porque êle é homogêneo) o que mostra que

$$-x = (-x_1, -x_2, -x_3, -x_4, -x_5)$$

é solução, portanto o inverso aditivo de uma solução está também no espaço solução. Na verdade isto vale para qualquer escalar pelo segundo teorema dos sistemas homogêneos isto vale para qualquer escalar λ

- iii. associatividade A soma de vetores é associativa. Se estes vetores forem solução já vimos que a soma deles é também solução. Se não valesse a associatividade no espaço solução seria uma contradição.
- iv. comutatividade O argumento anterior sobre associatividade se aplica aqui.

Verificando as propriedades do produto por um escalar.

- i. Produto por um escalar de uma solução é também solução pelo segundo teorema dos sistemas homogêneos. Vamos escrever o sistema como um produto de matrizes

$$\mathcal{A}X = 0$$

em que \mathcal{A} é a matriz do sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -3 & -4 & -9 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Acabamos de provar, usando o segundo teorema dos sistemas homogêneos que $\mathcal{A}X = 0 \Rightarrow \mathcal{A}(\lambda X) = 0 = \lambda \mathcal{A}X$

- ii. Associatividade à esquerda do produto por escalar. Dados dois escalares λ, α e uma solução X do sistema, provamos que λX é solução. Consequentemente, $\alpha(\lambda X) = (\alpha\lambda)X$ é solução e não pode ser uma solução diferente, logo no conjunto das soluções vale a associatividade à esquerda da multiplicação por um escalar.
- iii. Distributividade do produto por escalar relativamente à adição de soluções do sistema. Considere duas soluções X, Y do sistema de equações, e um escalar qualquer, λ . Então $\lambda X, \lambda Y$ são também soluções, assim como também a soma destas soluções

$$\lambda X + \lambda Y$$

é também solução. Para os vetores do \mathbf{R}^5 vale

$$\lambda X + \lambda Y = \lambda(X + Y)$$

provando que no espaço das soluções do sistema vale a distributividade da multiplicação por um escalar relativamente à adição de vetores.

Provamos assim que o espaço de soluções de sistema de equações lineares é um espaço vetorial.

(b) Verifique que os “escalares” x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 combinados com os vetores-coluna, da matriz do sistema, geram o espaço solução deste sistema. Calcule a dimensão do espaço solução.

Já vimos que o sistema pode ser escrito de forma compacta assim:

$$AX = B$$

em que A é a matriz do sistema, X é o vetor-variável, e B é o vetor de dados.

Mas analisando a forma expandida do sistema, (veja abaixo), podemos observar que

- a primeira coordenada do vetor-variável, multiplica a primeira coluna da matriz;
- a segunda coordenada do vetor-variável, multiplica a segunda coluna da matriz;
- e sucessivamente..

de formas que podemos interpretar o produto Ax como uma soma

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_5a_5$$

em que agora estamos considerando a_i como a coluna de ordem i da matriz A , combinação linear das colunas da matriz com os escalares x_i e interpretamos agora o sistema como

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_5a_5 = b$$

portanto o vetor b é uma combinação linear dos vetores-coluna da matriz A .

O sistema somente terá solução se b for um elemento do espaço gerado pelos vetores

$$a_1, a_2, \cdots, a_5$$

os vetores coluna da matriz, como queríamos provar.

A dimensão do espaço solução será então o número máximo de vetores l.i. dentre os vetores coluna da matriz. Para encontrar este número calculam-se os determinantes menores da matriz até achar um determinante diferente de zero. Se o determinante da matriz já for diferente de zero, então a imagem tem dimensão $n = 5$. Este número, a dimensão da imagem, é denominado de posto da matriz.

(c) Verifique que o sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 & = b_1 \\ -3x_1 - 4x_2 - 9x_3 + 2x_4 + x_5 & = b_2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 + x_5 & = b_3 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 8x_4 + 2x_5 & = b_4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 9x_5 & = b_5 \end{cases}$$

somente pode ter solução se o vetor \vec{b} de dados pertencer ao espaço gerado pelos vetores-linha da matriz do sistema.

É consequência do item anterior. Se o vetor de dados b não pertencer ao espaço gerado pelos vetores coluna, a combinação linear

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_5a_5 = b$$

não pode ser verdadeira.

5. ex. 5, página 87

Mostre que o conjunto-solução da equação diferencial

$$y'' + a_0y' + a_1y = 0$$

é um espaço vetorial.

Solução 10 Respeitando cuidadosamente a departamentalização das ciências e dos currículos, observe que não vamos resolver a equação diferencial.

Por coincidência esta é uma atitude “moderna” no estudo das equações diferenciais, primeiro estudar-lhe as propriedades, depois resolvê-las usando um padrão adequado.

Começamos verificando se, dadas duas soluções y_1, y_2 , a soma delas é ainda uma solução. Vamos somar duas equações:

$$y_1'' + a_0y_1' + a_1y_1 = 0 \quad (7.26)$$

$$y_2'' + a_0y_2' + a_1y_2 = 0 \quad (7.27)$$

$$(y_1 + y_2)'' + a_0(y_1 + y_2)' + a_1(y_1 + y_2) = 0 \quad (7.28)$$

$$(7.29)$$

e vemos que $y_1 + y_2$ satisfaz à equação diferencial, porque a derivada da soma é a soma das derivadas, mesmo para a segunda derivada, e o termo independente é zero (este fato é crucial, temos uma equação homogênea). Vamos agora verificar se o espaço solução é um espaço vetorial

- Adição é comutativa Mas $y_1 + y_2$ são funções reais, e a soma de funções reais é comutativa.
- existência do elemento neutro para adição O elemento neutro, na soma de funções é a função identicamente nula. Qualquer derivada desta função é zero o que mostra que ela satisfaz à equação diferencial .
- existência do inverso aditivo Vamos verificar se, y for uma solução desta equação diferencial, se também $-y$ é solução. Se multiplicarmos a equação por um número real qualquer λ temos

$$\lambda y'' + \lambda a_0y' + \lambda a_1y = 0 \equiv (\lambda y)'' + a_0(\lambda y)' + a_1(\lambda y) = 0$$

porque a derivada de λy é $\lambda y'$, inclusive para derivadas de ordem superior. Também estamos usando a comutatividade do produto dos escalares e a associatividade com o produto envolvendo funções, (identifique aonde).

- associatividade da adição Se y_1, y_2, y_3 forem três soluções da equação diferencial, queremos saber se

$$y_1 + (y_2 + y_3) = (y_1 + y_2) + y_3$$

mas a soma de funções é feita ponto a ponto, quer dizer, consideramos os números reais

$$y_1(t) + (y_2(t) + y_3(t)) = (y_1(t) + y_2(t)) + y_3(t)$$

para os quais vale a associatividade, logo a soma de funções é associativa, (dizemos, de soluções...)

Isto torna o espaço-solução, com a adição, um grupo comutativo.

Já verificamos acima que a multiplicação por um escalar está definida no espaço-solução. Vamos ver as propriedades deste produto.

associatividade à esquerda A justificativa é a mesma que usamos para a associatividade da adição, no fundo estamos multiplicando os escalares λ, α pelo número real $y(t)$ e logo vale

$$\lambda(\alpha y(t)) = (\lambda\alpha)y(t)$$

para todo t portanto também é verdade

$$\lambda(\alpha y) = (\lambda\alpha)y$$

o elemento neutro da multiplicação não altera o multiplicando, por argumento semelhante ao que usamos acima.

o elemento neutro da adição torna nulo o multiplicando, por argumento semelhante ao que usamos acima.

a distributividade da multiplicação por um escalar por argumento semelhante ao que usamos acima.

Provando assim que o conjunto-solução da equação diferencial

$$y'' + a_0y' + a_1y = 0$$

é um espaço vetorial.

Por esta razão, as equações diferenciais com este formato,

$$y^{(n)} + a_0y^{(n-1)} + \dots + a_1y = 0$$

se chamam *equações diferenciais lineares de ordem n*. Elas podem ser transformadas em um *sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem* e o espaço solução destas equações tem dimensão menor ou igual a n .

6. (ex. 1, página 80) Os valores de a que fazem os vetores

$$e_1 = (a, 3, 6), e_2 = (1, a, -2), e_3 = (0, -1, 2)$$

linearmente dependentes.

Solução 11 $O \det(e_1, e_2, e_3) = 0$

7.5 Sistemas Lineares- solucao

1. (ex. 1, pag. 114)

Encontramos o sistema abaixo

$$\begin{cases} 7x & = 7z \\ 8x + y & = 5z + 2w \\ y & = 3z \\ 3y & = 6z + w \end{cases} \quad (7.30)$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & -7 & 0 \\ 8 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.31)$$

cuja solução com *octave* é

```
octave:1> a=[7,0,-7,0;8,1,-5,-2;0,1,-3,0;0,3,-6,-1]
```

```
a =
```

```
7   0  -7   0
8   1  -5  -2
0   1  -3   0
0   3  -6  -1
```

```
octave:2> b = [0;0;0;0]
```

```
b =
```

```
0
0
0
0
```

```
octave:3> a\b
```

warning: matrix singular to machine precision, rcond = 1.09339e-18

ans =

0
0
0
0

octave:4> rank(a)

ans = 3

octave:5>

Um sistema homogêneo possível, indeterminado, cujo posto *octave* calcula como sendo 3 e portanto, pelo Teorema da *liberdade e do posto* o núcleo tem dimensão 1 sendo uma reta. Este resultado foi obtido ao resolvermos o (ex. 8), página 61. O método usado foi o do escalonamento da matriz que é chamado também de *método de Gauss* e que consiste em subtrações sucessivas das linhas da matriz para a eliminação do máximo de variáveis até ter apenas duas nas últimas equações. Este método pode também ser chamado de *eliminação das variáveis*. No método de Gauss se objetiva deixar o primeiro coeficiente não nulo de cada equação sendo 1. Veja *escalonamento* no índice remissivo.

Comentando a natureza da solução (somente um químico poderia fazê-lo de forma exemplar), se não houver átomos das substâncias reagentes resultaria em nenhum resultado, portanto a solução *zero* do problema é de se esperar. Consulte um químico para entender por que a equação da reta-solução é a já obtida:

$$(z, 3z, z, 3z).$$

2. (ex. 3, página 114)

(a) linearidade de F Considere dois polinômios p_1, p_2

$$F(p_1(t)) = (2t - a)p_1(t + 1) - t^2 p_1'(t) \quad (7.32)$$

$$F(p_2(t)) = (2t - a)p_2(t + 1) - t^2 p_2'(t) \quad (7.33)$$

$$F(p_1(t) + p_2(t)) = \quad (7.34)$$

$$= (2t - a)[p_1(t + 1) + p_2(t + 1)] - t^2[p_1'(t) + p_2'(t)] = \quad (7.35)$$

$$= (2t - a)p_1(t + 1) - t^2 p_1'(t) + \quad (7.36)$$

$$+ (2t - a)p_2(t + 1) - t^2 p_2'(t) = \quad (7.37)$$

$$= F(p_1(t)) + F(p_2(t)) \quad (7.38)$$

$$F(\lambda p(t)) = \quad (7.39)$$

$$= (2t - a)\lambda p(t + 1) - t^2(\lambda p)'(t) = \quad (7.40)$$

$$= \lambda[(2t - a)p(t + 1) - t^2 p'(t)] = \quad (7.41)$$

$$= \lambda F(p(t)) \quad (7.42)$$

$$(7.43)$$

mostrando que F é linear.

(b) Encontre a matriz \mathcal{A} de F relativamente à base

$$1, t, t^2$$

As colunas da matriz procurada são os valores do operador, calculados em cada um dos elementos da base,

$$F(1), F(t), F(t^2)$$

e expandidos segundo a mesma base.

$$F(1) = (2t - a) = \begin{pmatrix} -a \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.44)$$

$$F(t) = t^2 + (2 - a)t - a = \begin{pmatrix} -a \\ 2 - a \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7.45)$$

$$F(t^2) = (4 - a)t^2 + (2 - 2a)t - a = \begin{pmatrix} -a \\ 2 - 2a \\ 4 - a \end{pmatrix} \quad (7.46)$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -a & -a & -a \\ 2 & (2 - a) & 2(1 - a) \\ 0 & 1 & (4 - a) \end{pmatrix} \quad (7.47)$$

(c) $Ker(F)$

$$\begin{pmatrix} -a & -a & -a \\ 2 & (2 - a) & 2(1 - a) \\ 0 & 1 & (4 - a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.48)$$

$$\begin{pmatrix} -a & -a & -a \\ 0 & -a^2 & -2a^2 \\ 0 & 1 & (4 - a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.49)$$

$$\begin{pmatrix} -a & -a & -a \\ 0 & -a^2 & -2a^2 \\ 0 & 0 & 2a^2 - a^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.50)$$

- $a \notin \{0, 2\} \implies Ker(F) = \{0\}$
- $a = 0$ o núcleo do operador é

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 ; a_0 - 3a_2 = 0$$

- $a = 2$ o núcleo do operador é

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 ; a_1 + 2a_2 = 0$$

(d) (ex.4, pág. 115

Método: produto escalar de um vetor paralela à reta por um vetor ortogonal ao plano.

- eliminação dos parâmetros Eliminando os parâmetros s, t na equação paramétrica do plano:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.51)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y - x \\ 2x - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.52)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y - x \\ 2(2x - z) + y - x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.53)$$

$$2(2x - z) + y - x = 3x + y - 2z = 1 \quad (7.54)$$

- Ângulo entre vetor ortogonal ao plano e um vetor da reta

i. Vetor ortogonal ao plano

$$\Delta = (3, 1, -2)$$

ii. Vetor paralelo à reta

$$u = (1, 0, 2)$$

iii. produto escalar $\langle \Delta, u \rangle$

$$\frac{\langle \Delta, u \rangle}{\|\Delta\| \|u\|} = \cos(\theta) = \frac{3 + 0 - 4}{\sqrt{9 + 1 + 4} \sqrt{1 + 4}} = \frac{-1}{\sqrt{70}}$$

O ângulo procurado é $\phi = \theta - \frac{\pi}{2}$.

3. (ex. ??, página ??)

Usando *octave* temos:

```
octave:1> a = [1,-2;0,1]
```

```
a =
```

```
1 -2
0 1
```

```
octave:2> a*a
```

```
ans =
```

```
1 -4
0 1
```

```
octave:3> a = a*a
```

```
a =
```

```
1 -4
0 1
```

```
octave:4> a = a*a
```

```
a =
```

```
1 -8
0 1
```

conduzindo-nos à hipótese $\begin{pmatrix} 1 & -2^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Demonstração da hipótese, por indução

- $P_1 : A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2^1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ é verdade.
- Hipótese de indução. $P_n : A_n = \begin{pmatrix} 1 & -2^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. Recursão $P_n \implies P_{n+1}$

$$A_{n+1} = A_n^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2^n - 2^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2^{n+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

confirmando a hipótese de indução.

5. (ex.??, página ??) Escalonando a matriz temos

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & |a \\ 1 & 1 & 3 & |a+2 \\ 2 & -2 & (a+1) & |(a+1) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & |a \\ 0 & 2 & 2 & |2 \\ 0 & 0 & (a-1) & |1-a \end{pmatrix} \quad (7.55)$$

Se $a \neq 1$ o sistema tem solução única igual $(a+3, 3, -1)$ Se $a = 1$ a dimensão do núcleo será 1, a solução é a reta

$$(2y, y, 1-y); y \in \mathbf{R}$$

6. (ex. 7, página 115)

Solução 12 A introdução da “variável” z permite escrever a derivada segunda em duas etapas:

$$y' = z ; y'' = z' = -py' - qy = -pz - qy$$

portanto o sistema de duas equações representa a equação diferencial de segunda ordem inicial. Se considerarmos agora o vetor $X = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ podemos escrever a equação matricial que representa o sistema de equações acima como

$$X' = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q & -p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \quad (7.56)$$

$$X' = \mathcal{A}X \quad (7.57)$$

7.6 Matrizes não singulares-Solução dos exercícios

1. (ex. 4, página 143)

Solução 13 Se T for uma matriz inversível então podemos recuperar o sistema inicial com a seqüência de operações:

$$\begin{aligned} T^{-1}T &= \mathcal{I} \text{ a matriz identidade} \\ TAT^{-1} = \mathcal{B} &\longleftrightarrow TA = \mathcal{B}T \longleftrightarrow A = T^{-1}\mathcal{B}T \\ Tx = y ; Tb = c &\longleftrightarrow x = T^{-1}y ; b = T^{-1}c \\ \mathcal{B}y &= c \\ T^{-1}\mathcal{B}y &= T^{-1}c \\ T^{-1}\mathcal{B}(TT^{-1})y &= T^{-1}c \\ (T^{-1}\mathcal{B}T)(T^{-1}y) &= T^{-1}c \\ A(T^{-1}y) &= T^{-1}c \\ Ax &= b \end{aligned}$$

O diagrama (fig. 5.1) página 132, mostra o que fizemos, a matriz inversível T se chama, matriz de mudança de base, ela altera o referencial do espaço.

2. (ex. 2, página 145)

Solução 14 (a) Com scilab

-->A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]

A =

! 1. 2. 3. !
! 4. 5. 6. !
! 7. 8. 9. !

-->U1 = [1,0,0;4,-1,0;0,0,1]

U1 =

! 1. 0. 0. !
! 4. - 1. 0. !
! 0. 0. 1. !

--> U1*A

! 1. 2. 3. !
! 0. 3. 6. !
! 7. 8. 9. !

(b) -->U2 = [1,0,0;0,1,0;7,0,-1]

-->U2*U1 // composta de operacoes U1*U2

ans =

! 1. 0. 0. !
! 4. - 1. 0. !
! 7. 0. - 1. !

--> U2*U1*A

! 1. 2. 3. !
! 0. 3. 6. !
! 0. 6. 12. !

(c) **Resposta:** O esquema final é: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. (ex. 4b, página 147)

Solução 15 Se \mathcal{A} for uma matriz não singular, então sua inversa, \mathcal{A}^{-1} existe e podemos efetuar as seguintes operações equivalentes, se a matriz T for quadrada:

$$\begin{aligned} T\vec{x} = \vec{b} &\equiv \mathcal{A}T\vec{x} = \mathcal{A}\vec{b} \equiv \mathcal{A}T\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{A}\vec{b} \equiv \\ &\equiv T'\vec{x}' = \vec{b}' \end{aligned}$$

Como todas as operações feitas acima são inversíveis, (porque podemos efetuar as operações inversas), então os dois sistemas são equivalentes, quer dizer, se resolvermos $T'\vec{x}' = \vec{b}'$ então $x' = Ax \equiv x = A^{-1}x'$ podemos obter o valor de x com uma simples multiplicação de matrizes. Isto equivale na prática a ter trocado as variáveis, (coordenadas), resolvido um novo sistema e depois com uma multiplicação de matrizes, obter a solução do sistema primitivo ao qual correspondia a matriz de dados \vec{b} . Se obteve, assim, a solução no referencial primitivo. Só vale a pena fazer isto se o novo sistema for mais fácil de resolver, em outras palavras se a matriz T' for mais simples. Mas se pode demonstrar que é sempre possível se obter uma expressão mais simples para T .

Usamos a hipótese: "T é uma matriz quadrada". Esta hipótese sempre pode se verificar completando T com linhas ou colunas nulas.

4. (ex. 1, página 151)

Solução 16 Para escalonar um sistema, vamos executar apenas operações elementares-linha, portanto vamos multiplicar, à esquerda, por matrizes que induzem combinação linear de linhas. Vamos escrever o sistema expandido $I|T\vec{x} = \vec{b}$ justapondo a matriz identidade ao lado da matriz T . Todas as operações elementares feitas com T serão também efetuadas com a matriz justaposta, (que já não mais será matriz identidade), na linha abaixo temos $A|T\vec{x} = \vec{b}$ em que a matriz A já está memorizando as operações "multiplicar a segunda linha por -2 , a primeira linha por 1 e escrever a combinação linear das mesmas no lugar da segunda linha":

$$I; T\vec{x} = \vec{b} \iff \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{array} \right]; \left[\begin{array}{cc} 4 & -1 \\ 0 & -3 \end{array} \right]; \left(\begin{array}{c} 3 \\ -1 \end{array} \right) \iff A; T'x = b'$$

Isto transforma a matriz T na matriz triangular superior T' e o sistema já está escalonado e podemos resolvê-lo facilmente:

$$T'\vec{x} = \vec{b}' \iff \left[\begin{array}{cc} 4 & -1 \\ 0 & -3 \end{array} \right] \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 3 \\ -1 \end{array} \right) \iff$$

$$x_2 = \frac{1}{3}; x_1 = \frac{5}{6}.$$

Observe que quando se fazem apenas operações elementares-linha, a matriz das incógnitas não muda o que equivale a dizer que não foi feita nenhuma mudança de coordenadas, e se tem assim, diretamente, a solução no referencial original.

5. (ex. 2, página 151)

Solução 17

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Donde se conclue sucessivamente que x_3 é qualquer, vamos chamar $x_3 = t \in \mathbf{R}$, $5x_2 - 5t = 5 \Rightarrow x_2 = 1 + t, x_1 = -2t$. Temos assim as equações paramétricas de uma reta que é a solução do sistema de equações lineares proposto.

6. (ex. 3, página 151)

Solução 18 A matriz \mathcal{A} que escalona este sistema é $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ quer dizer que se T for a matriz do sistema, então $T' = \mathcal{A}T$. nesta ordem, é a matriz triangular superior procurada, e $\vec{b}' = \mathcal{A}\vec{b}$ o novo vetor de dados:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Então o novo sistema é: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Vemos que $x_3 = t \in \mathbf{R}$, é qualquer. $x_2 = x_3 = t, x_1 = -2t$. Estas são as equações de uma reta paralela à reta encontrada na solução anterior, mas agora esta passa na origem, quer dizer que encontramos a solução de $T\vec{x} = 0 \iff \text{Ker}(T)$, um espaço vetorial de dimensão 1. A solução, no caso anterior, é uma translação desta reta que corresponde ao seguinte teorema:

Teorema 39 Solução de sistemas lineares. A solução geral de um sistema linear $T\vec{x} = \vec{b}$ é uma translação da solução do sistema homogêneo $T\vec{x} = \vec{0}$ que passa numa solução particular $T\vec{x}_0 = \vec{b}$.

Donde se conclue sucessivamente que x_3 é qualquer, vamos chamar $x_3 = t$, $5x_2 - 5t = 0 \Rightarrow x_2 = t, x_1 = -2t$. Temos assim as equações paramétricas

de uma reta, que passa na origem, que é a solução do sistemas de equações lineares proposto. A reta solução neste caso é paralela à reta-solução do caso anterior, mas passando na origem porque é a solução de uma equação homogênea. Resolvemos uma equação do tipo $T\vec{x} = \vec{0}$, e encontramos $\text{Ker}(T)$.

Para encontrar a solução geral de um sistema linear, basta encontrar a solução geral do sistema homogêneo, e uma solução particular do não homogêneo.

7. (ex. 4, página 151)

Solução 19 Já vimos da solução anterior que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

memoriza as informações para escalonar a matriz do sistema, logo, se T for a matriz do sistema, então $T' = AT$, nesta ordem, é uma matriz triangular superior, e $\vec{b}' = A\vec{b}$ é a nova matriz de dados. O novo sistema

é: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$. O sistema se verifica então

impossível porque a última linha do vetor de dados sendo diferente de zero, não pode ser a combinação linear de coeficientes nulos.

8. (ex. 5, página 151)

Solução 20 A primeira matriz à esquerda já é o resultado da aplicação de combinação linear de linhas na matriz identidade para anular o primeiro elemento da segunda linha e o primeiro elemento da terceira linha da matriz do sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix},$$

observe que a alteração se deu também na matriz de dados. Se chamarmos A a matriz que efetua as transformações, executamos: $AT\vec{x} = A\vec{b}$ em que \vec{x}, \vec{b} são, respectivamente, as matrizes das incógnitas e de dados. Combinando linearmente agora as linhas 2 e 3 com coeficientes $\frac{1}{5}, \frac{1}{3}$ e colocando o resultado na terceira linha, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ \frac{-4}{15} & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{17}{15} \end{bmatrix},$$

Donde se conclue sucessivamente que $x_3 = \frac{-17}{15}, x_2 = \frac{14}{3}, x_1 = \frac{136}{15}$.

9. (ex. 6, página 151)

Solução 21 Para se obter uma matriz triangular superior, temos que sucessivamente ir anulando todos os elementos que se encontram abaixo da diagonal principal, e vimos na questão anterior que isto se faz multiplicando à esquerda por uma matriz que foi obtida transformando a matriz identidade com as operações-linha desejadas¹. Para obter uma matriz diagonal temos que efetuar operações-coluna o equivale a multiplicar à direita por matrizes que induzam operações-coluna. Se a matriz for simétrica, a cada operação-linha que anule um elemento abaixo da diagonal, idêntica operação-coluna irá anular um elemento simétrico em relação à diagonal. Se a matriz que induziu a operação linha foi A , então a matriz transposta A^t irá induzir a operação-coluna semelhante. Assim, depois de um número finito n de operações-coluna-linha:

$$A_n \dots A_2 A_1 T A_1^t A_2^t \dots A_n^t = D$$

temos T transformada na matriz diagonal D . A matriz A procurada, é o produto $A = A_n \dots A_2 A_1$, porque $A_1^t A_2^t \dots A_n^t = A^t$.

10. (ex. 8, página 152)

Solução 22 Escalonando a matriz temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que foi feita aplicando a matriz inversível

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

à matriz do sistema e ao vetor de dados. Como o posto da matriz escalonada é 2 então a liberdade é 1 e portanto a solução é uma translação do núcleo, uma reta, passando por valor particular da solução.

Determinação de um valor particular da solução:

$$3x_2 + 6x_3 = 2 \tag{7.58}$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \equiv 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 2 \tag{7.59}$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_2 + 6x_3 = 2x_1 + x_2 + 2 = 2 \tag{7.60}$$

$$x_2 = -2x_1 \tag{7.61}$$

¹na “prática” ninguém faz produtos de matrizes, diretamente se opera com as linhas, mas na teoria precisamos expressar estas operações como produtos de matrizes.

$$6x_3 = 2 - 3x_2 \implies 6x_3 = 2 + 6x_1 \quad (7.62)$$

$$x_3 = \frac{1+3x_1}{3} \quad (7.63)$$

$$(x_1, -2x_1, \frac{1+3x_1}{3}) \quad (7.64)$$

$$\text{uma solu\c{c}o\~{a} particular } (1, -2, \frac{4}{3}) \quad (7.65)$$

Testando $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ na equa\c{c}o\~{a} param\u00e9trica encontrada resulta

$$\text{em } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_1 \\ \frac{1+3x_1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

11. (ex. 9, p\u00e1gina 152)

Solu\c{c}o\~{a} 23 Com scilab

-->A = [2,6,1,2;0, 3, 1, 4;0, 3, 1, 2]

A =

```
!  2.   6.   1.   2. !
!  0.   3.   1.   4. !
!  0.   3.   1.   2. !
```

-->rank(A) = posto(A)

ans =

3.

O sistema tem liberdade=1. $\text{Ker}(A)$ tem dimens\u00e3o 1, \u00e9 uma reta. Resolvendo o sistema a partir da \u00faltima equa\c{c}o\~{a}, encontramos, usando a primeira forma escalonada da matriz,

$$-2x_4 = 4 \implies \Leftarrow x_4 = -2 \quad (7.66)$$

$$3x_2 + x_3 + 4x_4 = 3x_2 + x_3 = 9 \quad (7.67)$$

$$x_2 = \frac{9-x_3}{3} = 3 - \frac{x_3}{3} \quad (7.68)$$

$$2x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_4 = 2x_1 + 9 - x_3 + 9 - 4 = 5 \quad (7.69)$$

$$x_1 = -\frac{9+x_3}{2} \quad (7.70)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t; t \in \mathbf{R} \quad (7.71)$$

em que estamos usando $x_3 = t \in \mathbf{R}$ para a vari\u00e1vel livre. Usando a segunda express\u00e3o do escalonamento, temos

$$x_4 = -2 \quad (7.72)$$

$$(7.73)$$

$$x_2 + \frac{x_3}{3} = 3 \Rightarrow \Leftarrow x_2 = 3 - \frac{x_3}{3} \quad (7.74)$$

$$x_1 - \frac{x_3}{2} = -\frac{9}{2} \Rightarrow \Leftarrow x_1 = -\frac{9}{2} + \frac{x_3}{2} \quad (7.75)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t ; t \in \mathbf{R} \quad (7.76)$$

1. Verifique por cálculo direto qual das matrizes seguintes

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

tem inversa, (é não singular).

Solução 24 • Queremos encontrar uma matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ que multiplicada, (à direita e à esquerda) por $\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ resulte na identidade:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Efetuada as contas indicadas à esquerda temos:

$$\begin{bmatrix} a\cos(\theta) + b\text{sen}(\theta) & -a\text{sen}(\theta) + b\cos(\theta) \\ c\cos(\theta) + d\text{sen}(\theta) & -c\text{sen}(\theta) + d\cos(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Estabelecendo as igualdades entre os termos das matrizes anteriores² temos:

$$\begin{bmatrix} a\cos(\theta) + b\text{sen}(\theta) = 1 & -a\text{sen}(\theta) + b\cos(\theta) = 0 \\ c\cos(\theta) + d\text{sen}(\theta) = 0 & -c\text{sen}(\theta) + d\cos(\theta) = 1 \end{bmatrix}$$

Como 0, 1 são, respectivamente, cos e sen do ângulo zero, vemos:

$$\begin{bmatrix} a\cos(\theta) + b\text{sen}(\theta) = \cos(0) & -a\text{sen}(\theta) + b\cos(\theta) = \text{sen}(0) \\ c\cos(\theta) + d\text{sen}(\theta) = \text{sen}(0) & -c\text{sen}(\theta) + d\cos(\theta) = \cos(0) \end{bmatrix}$$

que sugere pensarmos em “ângulo soma” com

$$a = \cos(\alpha) ; b = \text{sen}(\alpha)$$

²que na prática significa escrever uma expressão matricial sob forma de sistema de equações

e daí sai que $0 = \alpha + \theta \Rightarrow \alpha = -\theta$. A matriz inversa de uma matriz da forma

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

sempre existe e é da forma

$$\begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\text{sen}(-\theta) \\ \text{sen}(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Estas matrizes se chamam **matrizes de rotação**, porque se aplicadas a uma vetor \vec{B} produzem neste vetor uma rotação de ângulo θ .

- Queremos encontrar uma matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tal que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Efetuando e realizando a igualdade termo a termo temos:

$$\begin{cases} a = 1 & 2a - b = 0 \\ c = 0 & 2c - d = 1 \end{cases}$$

Substituindo a por 1 e c por 0 encontramos que $b = 2, d = -1$

- Como no caso anterior, queremos encontrar uma matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

que multiplicada por $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ resulte na identidade:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Efetuando: $\begin{bmatrix} a - 2b = 1 & -a + 2b = 0 \\ c - 2d = 0 & -c + 2d = 1 \end{bmatrix}$.

Este esquema representa 4 equações nas incógnitas a, b, c, d . Se somarmos as duas primeiras equações $a - 2b = 1$; $-a + 2b = 0$ resulta na identidade impossível $0 = 1$ que significa “não ser possível encontrar a, b que satisfaça estas duas equações”, ou seja, a matriz $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ não tem inversa, é uma matriz singular.

2. Considere o sistema $\mathcal{T}x = b$. Prove algebricamente que, se $\vec{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ for uma solução do sistema e se \mathcal{A} for **não singular** então o \vec{v} é solução do sistema

$$\mathcal{A}\mathcal{T}x = \mathcal{A}b.$$

Prove também a recíproca desta afirmação.

Solução 25 (\Rightarrow) dizer que \vec{v} é uma solução de $\mathcal{T}x = b$ isto quer dizer que a identidade $\mathcal{T}v = b$ verifica. Multipliquemos a identidade, à esquerda, por \mathcal{A} :

$$\mathcal{A}\mathcal{T}v = \mathcal{A}b \iff \mathcal{A}\mathcal{T}v = \mathcal{A}b$$

mostrando que \vec{v} é solução do sistema modificado. (\Leftarrow) Reciprocamente, se \vec{v} for solução de $\mathcal{A}\mathcal{T}x = \mathcal{A}b$ então a identidade $\mathcal{A}\mathcal{T}v = \mathcal{A}b$ se verifica, e multiplicando-a por \mathcal{A}^{-1} à esquerda, temos

$$\mathcal{A}\mathcal{T}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{T}v = \mathcal{A}\mathcal{T}^{-1}\mathcal{A}b \iff \mathcal{T}v = b$$

como queríamos.

Observação 18 Invariância das soluções.

Mostramos, com esta invariância que a operação de inversão passo a passo, construída abaixo, produz uma matriz \mathcal{M} que transforma um sistema de equações sem que as soluções se percam.

Veremos em outra lista de exercícios que, o algoritmo de inversão passo a passo pode não servir para encontrar a inversa de uma matriz porque a matriz do sistema pode não ser singular, mas que ele pode nos conduzir a uma matriz mais simples e portanto a um sistema mais fácil de resolver, é o chamado método de Gauss.

3. Prove que as equações lineares $\mathcal{T}x = b$ e $\mathcal{A}\mathcal{T}x = \mathcal{A}b$ são equivalentes se a matriz \mathcal{A} for não singular.

Solução 26 É o conteúdo do exercício anterior, leia a observação 18.

4. inversão passo a passo de uma matriz

Solução 27 se você fizer as contas corretamente, aparecerá o resultado anunciado. Vamos desenvolver a solução do item abaixo que não tem um algoritmo indicado. Descubra uma matriz diagonal \mathcal{M}_3 que multiplicada pela última matriz, resulte na identidade, (a inversa de $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix}$)

Caso mais geral inversa da matriz diagonal: Se uma matriz for diagonal, tiver elementos diferentes de zero apenas sobre a diagonal principal³, se tiver inversa, a matriz inversa terá no lugar dos correspondentes elementos da diagonal principal os inversos multiplicativos:

$$\mathcal{A} = [\lambda_i \delta_{ij}] \Rightarrow \mathcal{A}^{-1} = [\lambda_i^{-1} \delta_{ij}] \Leftarrow \lambda_i \neq 0$$

A notação δ_{ij} se lê delta de Kronecker e vale 0 se $i \neq j$ ou 1 se $i = j$.

Então a matriz que procuramos é $\begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/1.5 \end{bmatrix}$.

³observe que os elementos da diagonal principal também podem ser zero...

5. Calcule a inversa da matriz $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}$ usando o método descrito na questão anterior.

Solução 28 Chame $\mathcal{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$, esta matriz foi obtida “multiplicando-se por 5 a primeira linha da matriz identidade e por -3 a segunda linha da matriz identidade, somando estas duas linhas assim modificadas colocando-se o resultado na segunda linha” é a memorização destas operações na matriz identidade e $\mathcal{M}_2 = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ que foi obtida “multiplicando-se por 5 a primeira linha, por 2 a segunda linha, somando as linhas assim modificadas e colocando o resultado na primeira linha”. O produto $\mathcal{M}_2\mathcal{M}_1\mathcal{A}$ é a matriz diagonal $\begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$. Primeira consequência dos cálculos, fica claro que a matriz \mathcal{A} é inversível. Por exercício anterior, a inversa desta última matriz é $\mathcal{M}_3 = \begin{bmatrix} 1/15 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix}$. Quer dizer que se fizermos o produto: $\mathcal{M}_3\mathcal{M}_2\mathcal{M}_1\mathcal{A}$ o resultado será a matriz identidade. Observe que a ordem de multiplicação é importante, o produto de matrizes não é comutativo, verifique invertendo os termos na⁴ multiplicação. Entretanto, a matriz

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_3\mathcal{M}_2\mathcal{M}_1 = \mathcal{A}^{-1}$$

e agora vale:

$$\mathcal{M}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{M} = \mathcal{I}.$$

6. Verifique que a matriz $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ não tem inversa, devido uma impossibilidade de aplicar o método de inversão passo a passo.

Solução 29 Não será possível encontrar a matriz \mathcal{M}_2 porque a segunda linha da matriz resultante do primeiro passo é nula.

7. Solução de um sistema de equações.

- (a) Considere a equação linear $\mathcal{T}\vec{X} = B \equiv \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Encontre uma matriz \mathcal{M} , não singular, tal que a nova equação linear $\mathcal{M} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ seja algebricamente idêntica à anterior, e a nova matriz seja diagonal.

Solução 30 Considere as matrizes $\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_1$, nesta ordem:

$$\mathcal{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}; \mathcal{M}_2 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

⁴todas estas contas podem ser facilmente executadas num programa de cálculo numérico como [17]

Observe que o método é ligeiramente diferente do que apresentamos anteriormente, agora simplesmente tomamos o primeiro elemento de cada linha para multiplicar pela outra linha, no caso de \mathcal{M}_1 e no caso de \mathcal{M}_2 usamos o segundo elemento de cada linha para multiplicar pela outra. As matrizes podem assim ficar com números inteiros muito grandes o que pode ser um problema em programas de computador uma vez que as linguagens de programação, em geral, tem limites para o tamanho dos números inteiros⁵. O produto $\mathcal{M}_2\mathcal{M}_1\mathcal{A}$ é a matriz $\begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ cuja inversa é $\mathcal{M}_3 = \begin{bmatrix} 1/15 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix}$. A matriz que procuramos será o produto

$$\mathcal{M}_3\mathcal{M}_2\mathcal{M}_1 = \begin{bmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 2/5 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Observe que a solicitação do texto do exercício exigia apenas que a nova matriz fosse diagonal, que dizer que a matriz \mathcal{M}_3 se encontra em excesso na solução.

- (b) Resolva a nova equação linear, e verifique, testando a solução na anterior, que ela é solução da equação linear antiga.

Solução 31 A nova equação linear é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 2/5 & 0.6 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.6 \\ 4.8 \end{pmatrix}$$

e a solução é visível: $x = 2.6$; $y = 4.8$. Se efetuarmos a operação $\mathcal{T} \begin{pmatrix} 2.6 \\ 4.8 \end{pmatrix}$ o resultado será $\begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}$ mostrando que se verifica uma identidade quando substituirmos x, y na equação linear pelos valores achados na equação modificada.

7.7 Mudança de base - solução.

1. Considere o sistema $T\vec{x} = \vec{b}$. Mostre que se a matriz \mathcal{A} for não singular⁶ então o sistema pode ser escrito como $T'\vec{x}' = \vec{b}'$ em que T é uma matriz equivalente a T , x' em um novo sistema de coordenadas, e \vec{b}' é uma nova versão da matriz de dados compatível com a matriz de dados inicial de modo que ao resolver o sistema $T'\vec{x}' = \vec{b}'$ se pode retornar ao sistema primitivo de coordenadas com a operação: $x = \mathcal{A}^{-1}x'$.

Solução 32 Se \mathcal{A} for uma matriz não singular, então sua inversa, \mathcal{A}^{-1} existe e podemos efetuar as seguintes operações equivalentes, se a matriz

⁵elas também tem limites para números fracionários, mas estes são em geral bem mais confortáveis ...

⁶se chama “matriz singular” àquelas que não tem inversa, e “não singulares” àquelas que têm inversa.

T for quadrada:

$$\begin{aligned} T\vec{x} = \vec{b} &\equiv \mathcal{A}T\vec{x} = \mathcal{A}\vec{b} \equiv \mathcal{A}T\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{A}\vec{b} \equiv \\ &\equiv T'\vec{x}' = \vec{b}' \end{aligned}$$

Como todas as operações feitas acima são inversíveis, (porque podemos efetuar as operações inversas), então os dois sistemas são equivalentes, quer dizer, se resolvermos $T'\vec{x}' = \vec{b}'$ então $x' = \mathcal{A}x \equiv x = \mathcal{A}^{-1}x'$ podemos obter o valor de x com uma simples multiplicação de matrizes. Isto equivale na prática a ter trocado as variáveis, (coordenadas), resolvido um novo sistema e depois com uma multiplicação de matrizes, obter a solução do sistema primitivo ao qual correspondia a matriz de dados \vec{b} . Se obteve, assim, a solução no referencial primitivo. Só vale a pena fazer isto se o novo sistema for mais fácil de resolver, em outras palavras se a matriz T' for mais simples. Mas se pode demonstrar que é sempre possível se obter uma expressão mais simples para T .

Usamos a hipótese: "T é uma matriz quadrada". Esta hipótese sempre pode se verificar completando T com linhas ou colunas nulas.

2. Considere a matriz $U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Multiplique UT e TU^t , com $T =$

$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ para verificar que a primeira multiplicação induz uma troca de linhas, (qual ?) e a segunda induz uma troca de colunas, (qual ?). Verifique depois a estrutura de U e de U^t para compreender como construir matrizes que induzem operações *linha* ou *coluna*.

Solução 33 $UT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{bmatrix}$ se produzindo uma permutação das linhas do mesmo tipo que se observa em U relativamente a matriz identidade. Logo

regra: "se permutando as linhas da matriz identidade e se a multiplicando pela esquerda por uma matriz T se induz em T a mesma permutação de linhas." $TU^t = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & c & a \\ e & f & d \\ h & i & g \end{bmatrix}$

regra: "se permutando as colunas da matriz identidade e se a multiplicando pela direita por uma matriz T se induz em T a mesma permutação de colunas."

3. Escalone o sistema $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, memorize as operações na matriz identidade, e determine a matriz \mathcal{A} que transforma o sistema primitivo no sistema com matriz escalonada.

Solução 34 Para escalonar um sistema, vamos executar apenas operações elementares-linha, portanto vamos multiplicar, à esquerda, por matrizes que induzem combinação linear de linhas. Vamos escrever o sistema expandido $I|T\vec{x} = \vec{b}$ justapondo a matriz identidade ao lado da matriz T . Todas as operações elementares feitas com T serão também efetuadas com a matriz justaposta, (que já não mais será matriz identidade), na linha abaixo temos $A|T\vec{x} = \vec{b}$ em que a matriz A já está memorizando as operações “multiplicar a segunda linha por -2 , a primeira linha por 1 e escrever a combinação linear das mesmas no lugar da segunda linha”:

$$I; T\vec{x} = \vec{b} \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \iff A; T'x = b'$$

Isto transforma a matriz T na matriz triangular superior T' e o sistema já está escalonado e podemos resolvê-lo facilmente:

$$T'\vec{x} = \vec{b}' \iff \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \iff x_2 = \frac{1}{3}; x_1 = \frac{5}{6}.$$

Observe que quando se fazem apenas operações elementares-linha, a matriz das incógnitas não muda o que equivale a dizer que não foi feita nenhuma mudança de coordenadas, e se tem assim, diretamente, a solução no referencial original.

4. Escalone a matriz do sistema $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ e discuta se ele tem solução.

Solução 35

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Donde se conclue sucessivamente que x_3 é qualquer, vamos chamar $x_3 = t \in \mathbf{R}$, $5x_2 - 5t = 5 \Rightarrow x_2 = 1 + t, x_1 = -2t$. Temos assim as equações paramétricas de uma reta que é a solução do sistema de equações lineares proposto.

5. Escalone a matriz do sistema $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e discuta se o sistema solução e compare com a solução do sistema anterior.

Solução 36 A matriz A que escalona este sistema é $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ quer dizer que se T for a matriz do sistema, então $T' = AT$. nesta ordem, é a matriz triangular superior procurada, e $\vec{b}' = A\vec{b}$ o novo vetor de dados:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Então o novo sistema é: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Vemos que $x_3 = t \in \mathbf{R}$, é qualquer. $x_2 = x_3 = t, x_1 = -2t$. Estas são as equações de uma reta paralela à reta encontrada na solução anterior, mas agora esta passa na origem, quer dizer que encontramos a solução de $T\vec{x} = 0 \iff \text{Ker}(T)$, um espaço vetorial de dimensão 1. A solução, no caso anterior, é uma translação desta reta que corresponde ao seguinte teorema:

Teorema 40 Solução de sistemas lineares. A solução geral de uma sistema linear $T\vec{x} = \vec{b}$ é uma translação da solução do sistema homogêneo $T\vec{x} = \vec{0}$ que passa numa solução particular $T\vec{x}_0 = \vec{b}$.

Para encontrar a solução geral de um sistema linear, basta encontrar a solução geral do sistema homogêneo, e uma solução particular do não homogêneo.

6. Discuta o sistema linear $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Solução 37 Já vimos da solução anterior que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

memoriza as informações para escalonar a matriz do sistema, logo, se T for a matriz do sistema, então $T' = AT$, nesta ordem, é uma matriz triangular superior, e $\vec{b}' = A\vec{b}$ é a nova matriz de dados. O novo sistema

é: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$. O sistema se verifica então

impossível porque a última linha do vetor de dados sendo diferente de zero, não pode ser a combinação linear de coeficientes nulos.

7. Escalone o sistema $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ e memorize na matriz identidade as operações feitas de modo a ter ao final a matriz \mathcal{A} que efetua o conjunto das operações feitas. Discuta o sistema.

Solução 38 A primeira matriz à esquerda já é o resultado da aplicação de combinação linear de linhas na matriz identidade para anular o primeiro elemento da segunda linha e o primeiro elemento da terceira linha da matriz do sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix},$$

observe que a alteração se deu também na matriz de dados. Se chamarmos \mathcal{A} a matriz que efetua as transformações, executamos: $\mathcal{A}T\vec{x} = \vec{A}\vec{b}$ em que \vec{x}, \vec{b} são, respectivamente, as matrizes das incógnitas e de dados. Combinando linearmente agora as linhas 2 e 3 com coeficientes $\frac{1}{5}, \frac{1}{3}$ e colocando o resultado na terceira linha, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ \frac{-4}{15} & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{17}{15} \end{bmatrix},$$

Donde se conclue sucessivamente que $x_3 = \frac{-17}{15}, x_2 = \frac{14}{3}, x_1 = \frac{136}{15}$.

8. Mostre que, se T for uma matriz simétrica, existe um matriz \mathcal{A} tal que $\mathcal{A}T\mathcal{A}^{-1}$ é uma matriz diagonal .

Solução 39 Para se obter uma matriz triangular superior, temos que sucessivamente ir anulando todos os elementos que se encontrem abaixo da diagonal principal, e vimos na questão anterior que isto se faz multiplicando à esquerda por uma matriz que foi obtida transformando a matriz identidade com as operações-linha desejadas⁷. Para obter uma matriz diagonal temos que efetuar operações-coluna o equivale a multiplicar à direita por matrizes que induzam operações-coluna. Se a matriz for simétrica, a cada operação-linha que anule um elemento abaixo da diagonal, idêntica operação-coluna irá anular um elemento simétrico em relação à diagonal. Se a matriz que induziu a operação linha foi \mathcal{A} , então a matriz transposta \mathcal{A}^t irá induzir a operação-coluna semelhante. Assim, depois de um número finito n de operações-coluna-linha:

$$\mathcal{A}_n \dots \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_1 T \mathcal{A}_1^t \mathcal{A}_2^t \dots \mathcal{A}_n^t = D$$

temos T transformada na matriz diagonal D . A matriz \mathcal{A} procurada, é o produto $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n \dots \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_1$, porque $\mathcal{A}_1^t \mathcal{A}_2^t \dots \mathcal{A}_n^t = \mathcal{A}^t$.

⁷na “prática” ninguém faz produtos de matrizes, diretamente se opera com as linhas, mas na teoria precisamos expressar estas operações como produtos de matrizes.

7.8 Operações elementares linha-coluna - solução

- (a) Mostre que as *operações elementares* com matrizes são operadores lineares, identifique o espaço vetorial em que eles atuam.

Solução 40

- (b) Mostre que as *operações elementares* são inversíveis.
 - (c) Mostre as *operações elementares-linha* podem ser representadas por operações do mesmo tipo efetuadas sobre a matriz identidade, no sentido de que, “a matriz identidade, transformada por uma *operação elementar-linha*, ao ser multiplicada à esquerda por T , induz em T , a mesma *operação elementar linha* efetuada na matriz identidade”, simbolicamente: $\mathcal{O}(I)T = \mathcal{O}(T)$, em que \mathcal{O} representa uma *operação elementar-linha*.
 - (d) Mostre que
 - (e) Mostre as *operações elementares-coluna* podem ser representadas por operações do mesmo tipo efetuadas sobre a matriz identidade, no sentido de que, “a matriz identidade, transformada por uma *operação elementar-coluna*, ao ser multiplicada à direita por T , induz em T , a mesma *operação elementar-coluna* efetuada na matriz identidade”, simbolicamente: $T\mathcal{O}(I) = \mathcal{O}(T)$, em que \mathcal{O} representa uma *operação elementar-coluna*.
2. Considere o sistema de equações $T\vec{x} = \vec{b}$ expandido pela matriz identidade I à esquerda: $I|T\vec{x} = \vec{b}$. Mostre que ao escalonar o sistema $T\vec{x} = \vec{b}$, aplicando-se a I as mesmas operações elementares linha, se terá *memorizado* em I todas as operações linha, no sentido de que a matriz $\mathcal{O}(I)$ assim resultante, se aplicada em T produz a matriz do sistema escalonado.
 3. Use um raciocínio heurístico para concluir que ATA^{-1} é uma matriz diagonal se, e somente se, T for uma matriz simétrica.

7.9 Matriz diagonal e vetor próprio - Solução.

1. Considere a matriz T cujas entradas são todas nulas exceto as da diagonal principal que são todas iguais ao número real λ . Verifique que $Tx = \lambda x$. Ou seja T expande o espaço inteiro, por igual, com o fator de expansão uniforme λ . *Expande* ou *contraí*, se $\lambda > 1$ ou $\lambda < 1$.
2. Na matriz S todas as entradas são nulas exceto as da diagonal principal onde se encontram os números $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. A matriz T do exercício anterior corresponde ao caso particular em que $\lambda_1 = \dots = \lambda_n$. Uma matriz deste tipo se chama **matriz diagonal**.
 - (a) Suponha que $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ sejam os distintos componentes de um **sistema econômico**, todos indispensáveis e independentes. A economia de um setor \vec{v} deste sistema, (*um município, por exemplo, dentro de um país*), caracteriza sua presença no **sistema** com os pesos $\{x_1, \dots, x_n\}$ com que participam na produção: $\vec{v} = x_1\vec{e}_1 +$

$\dots + x_n \vec{e}_n$. Se o município não produz o item \vec{e}_i então $x_i = 0$. A matriz T memoriza a evolução do sistema em dois momentos. Suponha que o município \vec{v} duplicou sua presença na economia com os produtos $\{\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_7\}$, não teve presença relativamente aos produtos $\{\vec{e}_2, \vec{e}_4, \vec{e}_6, \vec{e}_8, \vec{e}_9, \vec{e}_{10}\}$, e sua produção de \vec{e}_5 se reduziu a, metade, relativamente ao período anterior observado. Suponha que o número de itens da economia é 10, (sua dimensão). Determine a matriz T que memoriza a transição de um estado da economia \vec{v} para o seguinte $T\vec{v}$.

- (b) Considere a mesma terminologia anterior, mas agora consideremos que a matriz T com elementos diagonais $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ representa as taxas de juros aplicadas aos empréstimos de financiamentos na produção dos distintos componentes. Qual o significado econômico para o município se o banco central estabelecer as taxas de juros $\{\lambda_1 = 10\%a.m. = \dots = \lambda_7 = 10\%, \lambda_8 = \lambda_9 = \lambda_{10} = 1\%a.m.\}$, não esquecendo que o município \vec{v} comparece na economia apenas com o itens $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_7$.
- (c) Suponha que uma taxa de juros razoável seja de $5\%a.a.$ e que o planejamento econômico deseje estimular a produção dos itens $\{\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_5\}$, desestimular a produção dos itens $\{\vec{e}_6, \vec{e}_8, \vec{e}_{10}\}$ e manter estáveis os restantes. Como poderia ser a matriz T ?

Definição 31 *Valor próprio, vetor próprio.*

Se para uma transformação houver algum vetor \vec{x} tal que $T\vec{x} = \lambda\vec{x}$, dizemos que λ é valor próprio de T e que \vec{x} é um vetor próprio associado ao valor próprio λ .

3. Identifique **vetores próprios** e **valores próprios**, dizendo quem é de quem, nas questões acima.
4. Verifique que a matriz de rotação real

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (7.77)$$

não pode ter valores próprios, nem vetores próprios, a não ser para exatamente para dois valores de θ , quais?

5. base de vetores próprios.

- (a) Encontre os **valores próprios** e depois um par de **vetores próprios** \vec{v}_1, \vec{v}_2 correspondendo aos **valores próprios** encontrados, para matriz $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ ⁸. Verifique que os vetores próprios são l.i.⁹. Um par de vetores próprios forma assim uma base para o espaço.

⁸Observe que o vetore próprio associado a um valor próprio não é único, guarde esta informação para uso posterior.

⁹sempre que os valores próprios forem diferentes, os vetores próprios associados serão l.i.. Mas para um único valor próprio pode também haver associados vetores próprios l.i..

Solução 41 Por definição procuramos λ tal que $\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$ e podemos observar que depois da igualdade temos: $\lambda\mathcal{I}\vec{x}$. Isto nos permite calcular:

$$\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\mathcal{I}\vec{x} \equiv (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})\vec{x} = 0$$

e como não tem sentido considerar vetor próprio nulo, estamos procurando uma solução não trivial para esta equação homogênea o que nos leva a conclusão que o determinante do sistema tem que ser nulo:

$$P(\lambda) = \det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}) = 0$$

$P(\lambda)$ é um polinômio de grau n em λ sendo \mathcal{A} uma matriz $n \times n$. Este polinômio recebe o nome de **polinômio característico**¹⁰ No presente caso temos:

$$P(\lambda) = (1 - \lambda)(4 - \lambda) + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 2; \lambda = 3$$

Voltando a re-escrever a equação para cada um dos valores encontrados para λ podemos encontrar vetores próprios $\vec{v}_{\lambda=2}$ e $\vec{v}_{\lambda=3}$: No primeiro caso encontramos, se considerarmos $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $x_1 = 2x_2$. Quer dizer que qualquer vetor desta reta é um vetor próprio associado a $\lambda = 2$, por exemplo $\vec{v}_1 = (2, 1)$. De forma análoga, com $\lambda = 3$ encontraremos que $x_1 = x_2$, logo $\vec{v}_2 = (1, 1)$ é um exemplo. Os vetores \vec{v}_1, \vec{v}_2 são l.i. e formam assim uma base para \mathbf{R}^2 . A matriz da transformação linear na nova base será $\mathcal{A}' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\vec{v}_1) \\ A(\vec{v}_2) \end{bmatrix}$ porque já vimos que matriz de uma transformação linear é formada pelos vetores-coluna obtidos ao se aplicar a transformação linear nos vetores da base, e aqui $A\vec{v}_1 = 2\vec{v}_1$ $A\vec{v}_2 = 3\vec{v}_2$.

Geometricamente isto significa que a transformação linear representada por \mathcal{A} deforma o espaço com duas escalas diferentes, uma com valor $\lambda = 2$ na direção do vetor $\vec{v}_1 = (2, 1)$ e com valor $\lambda = 3$ na direção do vetor $\vec{v}_2 = (1, 1)$. O estudo dos valores próprios-vetores próprios nos leva a encontrar os sub-espacos ao longo dos quais as deformações são constantes. Neste caso a deformação se dá com coeficiente 2 ao longo da reta $x_2 = 2x_1$ e com coeficiente 3 ao longo da reta $x_2 = x_1$.

Podemos ver os valores próprios na diagonal da nova matriz. A teoria geral diz que quando encontrarmos todos os valores próprios próprios de uma operador linear, se eles forem todos diferentes, a matriz, numa base formada de vetores próprios será uma matriz diagonal com os valores próprios na diagonal.

- (b) A matriz \mathcal{A} do exercício anterior só existe porque uma base foi escolhida para representar os vetores no espaço. Suponha que a base escolhida tenha sido $\vec{e}_1 = (1, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1)$.

¹⁰as denominações *vetor característico*, *valor característico* são usadas também.

Definição 32 *Matriz de mudança de base.* Uma matriz T se diz de **mudança de base** se ela transforma $T\vec{e}_i$ em \vec{v}_i em que $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ e $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ são duas bases diferentes do espaço.

Encontre a matriz de mudança de base, da base primitiva para a base de vetores próprios, relativamente ao problema anterior.

(c)

6. (a) Mostre que as *operações elementares* com matrizes são operadores lineares, identifique o espaço vetorial em que eles atuam.

Solução 42

(b) Mostre que as *operações elementares* são inversíveis.

(c) Mostre as *operações elementares-linha* podem ser representadas por operações do mesmo tipo efetuadas sobre a matriz identidade, no sentido de que, “a matriz identidade, transformada por uma *operação elementar-linha*, ao ser multiplicada à esquerda por T , induz em T , a mesma *operação elementar linha* efetuada na matriz identidade”, simbolicamente: $\mathcal{O}(I)T = \mathcal{O}(T)$, em que \mathcal{O} representa uma *operação elementar-linha*.

(d) Mostre que

(e) Mostre as *operações elementares-coluna* podem ser representadas por operações do mesmo tipo efetuadas sobre a matriz identidade, no sentido de que, “a matriz identidade, transformada por uma *operação elementar-coluna*, ao ser multiplicada à direita por T , induz em T , a mesma *operação elementar-coluna* efetuada na matriz identidade”, simbolicamente: $T\mathcal{O}(I) = \mathcal{O}(T)$, em que \mathcal{O} representa uma *operação elementar-coluna*.

7. Considere o sistema de equações $T\vec{x} = \vec{b}$ expandido pela matriz identidade I à esquerda: $I|T\vec{x} = \vec{b}$. Mostre que ao escalonar o sistema $T\vec{x} = \vec{b}$, aplicando-se a I as mesmas operações elementares linha, se terá *memorizado* em I todas as operações linha, no sentido de que a matriz $\mathcal{O}(I)$ assim resultante, se aplicada em T produz a matriz do sistema escalonado.

8. Use um raciocínio heurístico para concluir que $\mathcal{A}T\mathcal{A}^{-1}$ é uma matriz diagonal se, e somente se, T for uma matriz simétrica.

1. (ex. 1, página 129)

(a) **Solução 43**

por hipótese $T(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$

considerando $\vec{v} = \alpha\vec{u}$

$$T(\vec{v}) = T(\alpha\vec{u}) = \alpha T(\vec{u}) = \alpha(\lambda\vec{u}) = \lambda(\alpha\vec{u}) = \lambda\vec{v}$$

$$\text{logo } T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$$

Observe que as contas valem inclusive para $\alpha = 0$ e obviamente o vetor zero é um valor singular do conjunto dos autovetores, verifique que ele satisfaz à definição para qualquer autovalor.

(b) **Solução 44**

$$\begin{aligned}u &= \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_1 \\T(\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_1) &= \alpha_1 T(\vec{u}_1) + \alpha_2 T(\vec{u}_1) = \\&= \alpha_1 \lambda \vec{u}_1 + \alpha_2 \lambda \vec{u}_1 = \lambda(\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_1) = \\&\quad \lambda u\end{aligned}$$

Os cálculos valem, inclusive, para a combinação linear nula.

(c) **Solução 45** A primeira alternativa é a correta.

O vetor zero é uma solução de qualquer equação linear homogênea, portanto é solução de

$$\mathcal{T} - \lambda I = 0$$

portanto E_λ é um espaço vetorial chamado autoespaço associado ao autovalor λ

2. (ex. 2, página 129)

Solução 46 (a)

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 8 & 12 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 8 - \lambda & 12 \\ -2 & -2 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 8 - \lambda & 12 \\ 0 & 24 + (\lambda - 8)(\lambda + 2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Resolvendo o novo sistema, na variável λ , temos

$$[24 + (\lambda - 8)(\lambda + 2)]x_2 = 0 \equiv 24 + (\lambda - 8)(\lambda + 2) = 0$$

porque queremos encontrar λ , não importa o valor de x_2 .

$$\begin{aligned}24 + (\lambda - 8)(\lambda + 2) &= 0 \\ \lambda^2 - 6\lambda + 8 &= 0 \\ \lambda &\in \{4, 2\}\end{aligned}$$

autovetor associado a $\lambda = 2$

Consideramos agora a outra equação que podemos deduzir do sistema

$$(8 - \lambda)x_1 + 12x_2 = 0$$

Quando $\lambda = 2$

$$6x_1 + 12x_2 = 0 ; x_1 = 2 \implies (2, -1)$$

Quando $\lambda = 4$

$$4x_1 + 12x_2 = 0 ; x_1 = 3 \implies (3, -1)$$

Testando com scilab

```
-->T1 = [8,12;-2,-2]
```

```
T1 =
```

```
! 8. 12. !
```

```
! - 2. - 2. !
```

```
-->T1*[2;-1]
```

```
ans =
```

```
! 4. !
```

```
! - 2. !
```

```
-->T1*[3;-1]
```

```
ans =
```

```
! 12. !
```

```
! - 4. !
```

(b) Escalonando (triangularizando) a matriz do sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 5 & 0 & 8 \\ 8 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix} \equiv \quad (7.78)$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 5 & 8 \\ 5 & -\lambda & 8 \\ 8 & 5 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.79)$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 5 & 8 \\ 5 & -\lambda & 8 \\ 8 & 5 & -\lambda \end{pmatrix} \equiv \quad (7.80)$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 5 & 8 \\ 0 & \lambda^2 - 25 & -(8\lambda + 40) \\ 0 & 40 + 5\lambda & 64 - \lambda^2 \end{pmatrix} \equiv \quad (7.81)$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 5 & 8 \\ 0 & \lambda^2 - 25 & -(8\lambda + 40) \\ 0 & 0 & (\lambda^2 - 25)(64 - \lambda^2) + (40 + 5\lambda)(8\lambda + 40) \end{pmatrix} \quad (7.82)$$

Resolvendo a equação em λ , eliminando a solução $\lambda = 0$ porque não interessam “autovalores nulos”, veja a definição, temos

$$(\lambda^2 - 25)(64 - \lambda^2) + (40 + 5\lambda)(8\lambda + 40) = 0 \quad (7.83)$$

$$\lambda^4 - 129\lambda^2 - 520\lambda = 0 \quad (7.84)$$

$$\lambda^3 - 129\lambda - 520 = 0 \quad (7.85)$$

$$(7.86)$$

As soluções inteiras desta equação sendo os divisores de 520, (ver exercícios ao final), então temos

$$\text{factor } 520 \text{ --> } 520 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 13$$

temos que testar se algum destes números é solução da equação, com `scilab` (até nem precisava), mas este livro é com apoio computacional,

```
-->function y = f(x)
-->y = x**3 - 129*x - 520
-->endfunction
```

```
-->f(2)
ans =
```

```
- 770.
```

```
-->f(-2)
ans =
```

```
- 270.
```

```
-->f(3)
ans =
```

```
- 880.
```

```
-->f(-3)
ans =
```

```
- 160.
```

```
-->f(5)
ans =
```

```
- 1040.
```

```
-->f(-5)
ans =
```

```
0.
```

vemos que $\lambda = -5$ é raiz da equação e portanto $\lambda + 5$ é fator deste polinômio e podemos dividi-lo por $\lambda + 5$

1	0	-129	-520	1	5
1	5			1	-5 -104
0	-5	-129			
	5	25			
	0	-104	-520		
		104	520		
		0	0		

para encontrar

$$\lambda^2 - 5\lambda - 104$$

cujas raízes são

$$\lambda \in \{-8, 13\}$$

e portanto os autovalores são

$$\lambda \in \{-5, -8, 13\}$$

Podemos agora usar o sistema, com cada um dos autovalores para encontrar um autovetor associado:

- $\lambda = -5$

$$\begin{pmatrix} -5 & 5 & 8 \\ 5 & -5 & 8 \\ 8 & 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \quad (7.87)$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 8 \\ 8 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \quad (7.88)$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 8 \\ 5 & 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \quad (7.89)$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 8 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.90)$$

$$3x_1 - 3x_3 = 0 \implies x_1 = x_3 \quad (7.91)$$

$$5x_2 + 13x_3 = 0 \implies x_2 = -\frac{13x_3}{5} \quad (7.92)$$

Observe que a troca de colunas na matriz do sistema impõe a troca da ordem das "variáveis". A permutação de colunas corresponde a uma permutação da base do espaço.

Tomando $x_3 = 5$ temos o autovetor $(5, -13, 5)$

- $\lambda = -8$

$$\begin{pmatrix} 8 & 5 & 8 \\ 5 & 8 & 8 \\ 8 & 5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \quad (7.93)$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 8 \\ 8 & 5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \quad (7.94)$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 8 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \quad (7.95)$$

$$3x_1 - 3x_2 = 0 \implies x_1 = x_2 \quad (7.96)$$

$$13x_1 + 8x_3 = 0 \implies x_3 = -\frac{13x_1}{8} \quad (7.97)$$

tomando $x_1 = 8$ temos o autovetor $(8, 8, -13)$

- $\lambda = 13$

$$\begin{pmatrix} -13 & 5 & 8 \\ 5 & -13 & 8 \\ 8 & 5 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.98)$$

$$\begin{pmatrix} -13 & 5 & 8 \\ 5 & -13 & 8 \\ 8 & 5 & -13 \end{pmatrix} \equiv \quad (7.99)$$

$$\begin{pmatrix} -13 & 5 & 8 \\ 5 & -13 & 8 \\ 13 & -8 & -5 \end{pmatrix} \equiv \quad (7.100)$$

$$\begin{pmatrix} -13 & 5 & 8 \\ 5 & -13 & 8 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \equiv \quad (7.101)$$

$$\begin{pmatrix} 5(-13) & 5*5 & 5*8 \\ 13*5 & 13*(-13) & 13*8 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \equiv \quad (7.102)$$

$$\begin{pmatrix} -13 & 5 & 8 \\ 0 & -144 & 144 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \equiv \quad (7.103)$$

$$\begin{pmatrix} -13 & 5 & 8 \\ -3*0 & -3*(-144) & -3*(144) \\ 144*0 & 144*(-3) & 144*3 \end{pmatrix} \quad (7.104)$$

$$\begin{pmatrix} -13 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.105)$$

$$\begin{pmatrix} -13 & 5 & 8 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.106)$$

$$x_2 = x_3 \implies -13x_1 + 13x_2 = 0 \implies x_1 = x_2 \quad (7.107)$$

tomando $x_1 = 1$ temos o autovetor $(1, 1, 1)$

Os cálculos reforçam um resultado anterior: existe uma multiplicidade de autovetores para cada autovalor, na verdade existe um espaço de autovetores, um autoespaço, associado a cada autovalor. Em geral o que fazemos é encontrar vetores básicos para cada um dos autoespaços, uma base.

3. (ex. 3, página 130)

Solução 47 (a) Suponha que os autovetores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ possam ser l.d. e consideremos a combinação linear trivial

$$\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 = 0$$

$$\begin{aligned} T(\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2) &= 0 & T(\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2) &= \\ &= \alpha_1 T(\vec{u}_1) + \alpha_2 T(\vec{u}_2) = \\ &= \alpha_1 \lambda_2 \vec{u}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \vec{u}_2 = 0 \implies \\ &\implies \{\vec{u}_1 = \beta \vec{u}_2\} \end{aligned}$$

os vetores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ são colineares e conseqüentemente $\lambda_1 = \lambda_2$ contradizendo a hipótese inicial.

A conclusão é então que, autovetores correspondentes a autovalores distintos são linearmente independentes

(b) Vamos agora considerar que os vetores

$$\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$$

são l.i. e vamos considerar mais um autovetor, \vec{u}_{k+1} associado ao autovalor λ_{k+1} diferente de todos os demais. Aplicando T a combinação linear nula

$$\alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_k \vec{u}_k + \alpha_{k+1} \vec{u}_{k+1} = 0 \implies \quad (7.108)$$

$$\implies \alpha_{k+1} T(\vec{u}_{k+1}) = -T(\alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_k \vec{u}_k) \implies \quad (7.109)$$

$$\vec{u}_{k+1} \in [\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k] \quad (7.110)$$

Mas a última linha contradiz o fato de que \vec{u}_{k+1} porque ele é l.i. com qualquer outro autovetor, então ou

- $\lambda_{k+1} = 0$

- o conjunto $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k, \vec{u}_{k+1}\}$ é l.i.
e como a primeira afirmação não interessa, vale a segunda.
-

4. (ex. 1, página 134)

(a) **Solução 48**

$$\begin{aligned} L(\sin(x)) &= [(\sin(x))]' = [\cos(x)]' = -\sin(x) \\ L(\cos(x)) &= [(\cos(x))]' = [-\sin(x)]' = -\cos(x) \\ \forall ; \alpha \sin(x) + \beta \cos(x) = 0 &\implies \alpha = \beta = 0 \end{aligned}$$

Ambos os vetores estão associados ao autovalor -1 .

(b) **Solução 49** Queremos uma função cuja segunda derivada seja ela mesma:

$$\begin{aligned} L(y) &= y'' = y \\ \text{como } y &= e^{ax} \implies y' = ae^{ax} = ay, y'' = a^2 e^{ax} \\ \text{então } ay &= e^{ax} ; a = \pm 1 \text{ é solução.} \end{aligned}$$

As soluções encontradas, $y = e^{-x}, y = e^x$ são dois vetores l.i. associados ao autovalor $\underline{1}$.

(c) **Solução 50**

$$\begin{aligned} y &= e^{ix} \\ L(y) &= i^2 e^{ix} = -e^{ix} \\ y = e^{ix} &\text{ é um autovetor associado ao autovalor } -1 \end{aligned}$$

(d) **Solução 51** é a fórmula de Abel-Euler

5. (ex. 7, página 131)

(a) Encontre os autovalores e depois um par de autovetores \vec{v}_1, \vec{v}_2 respondendo aos autovalores encontrados, para matriz $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

Solução 52 Por definição procuramos λ tal que $\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$ e podemos observar que depois da igualdade temos: $\lambda\mathcal{I}\vec{x}$. Isto nos permite calcular:

$$\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\mathcal{I}\vec{x} \equiv (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})\vec{x} = 0$$

e como o autovetor é qualquer estamos procurando uma solução não trivial para esta equação homogênea o que nos leva a conclusão que o determinante do sistema tem que ser nulo:

$$P(\lambda) = \det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}) = 0$$

$P(\lambda)$ é um polinômio de grau n em λ sendo \mathcal{A} uma matriz $n \times n$. Este polinômio recebe o nome de polinômio característico¹¹. No presente caso temos:

$$P(\lambda) = (1 - \lambda)(4 - \lambda) + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 2; \lambda = 3$$

Voltando a re-escrever a equação para cada um dos valores encontrados para λ podemos encontrar vetores próprios $\vec{v}_{\lambda=2}$ e $\vec{v}_{\lambda=3}$: No primeiro caso encontramos, se considerarmos $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $x_1 = 2x_2$. Quer dizer que qualquer vetor desta reta é um vetor próprio associado a $\lambda = 2$, por exemplo $\vec{v}_1 = (2, 1)$. De forma análoga, com $\lambda = 3$ encontraremos que $x_1 = x_2$, logo $\vec{v}_2 = (1, 1)$ é um exemplo. Os vetores \vec{v}_1, \vec{v}_2 são l.i. e formam assim uma base para \mathbf{R}^2 . A matriz da transformação linear na nova base será $\mathcal{A}' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\vec{v}_1) \\ A(\vec{v}_2) \end{bmatrix}$ porque já vimos que matriz de uma transformação linear é formada pelos vetores-coluna obtidos ao se aplicar a transformação linear nos vetores da base, e aqui $\mathcal{A}\vec{v}_1 = 2\vec{v}_1$ $\mathcal{A}\vec{v}_2 = 3\vec{v}_2$.

Geometricamente isto significa que a transformação linear representada por \mathcal{A} deforma o espaço com duas escalas diferentes, uma com valor $\lambda = 2$ na direção do vetor $\vec{v}_1 = (2, 1)$ e com valor $\lambda = 3$ na direção do vetor $\vec{v}_2 = (1, 1)$. O estudo dos valores próprios-vetores próprios nos leva a encontrar os sub-espacos ao longo dos quais as deformações são constantes. Neste caso a deformação se dá com coeficiente 2 ao longo da reta $x_2 = 2x_1$ e com coeficiente 3 ao longo da reta $x_2 = x_1$.

Podemos ver os valores próprios na diagonal da nova matriz. A teoria geral diz que quando encontrarmos todos os valores próprios próprios de uma operador linear, se eles forem todos diferentes, a matriz, numa base formada de vetores próprios será uma matriz diagonal com os valores próprios na diagonal.

- (b)
- (c)
- (d)

j- forca uma parada do LaTeX

¹¹a equação polinomial se chama equação característica.

7.10 Equivalência de matrizes e operações linha-soluções

1. (ex. 1, página 154)

Solução 53

$$\begin{pmatrix} 18 & -6 & -6 & 0 \\ -6 & 12 & 0 & -6 \\ -6 & 0 & 12 & -6 \\ 0 & -6 & -6 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3}L_1 + L_2 \rightarrow L_2 ; \frac{1}{3}L_1 + L_2 \rightarrow L_3$$

$$\begin{pmatrix} 18 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & 10 & -2 & -6 \\ 0 & -2 & 10 & -6 \\ 0 & -6 & -6 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 20 \\ 40 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{5}L_2 + L_3 \rightarrow L_3 \quad \frac{3}{5}L_2 + L_4 \rightarrow L_4$$

$$\begin{pmatrix} 18 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & 10 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 9.6 & -7.2 \\ 0 & 0 & -7.2 & 8.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 20 \\ 44 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\frac{7.2}{9.6}L_3 + L_4 \rightarrow L_4$$

$$\begin{pmatrix} 18 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & 10 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 9.6 & -7.2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 20 \\ 44 \\ 45 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13.333 \\ 14.166666 \\ 15.833333 \\ 15 \end{pmatrix}$$

usando scilab, para confirmar os resultados,

a =

```
! 18. - 6. - 6. 0. !
! - 6. 12. 0. - 6. !
! - 6. 0. 12. - 6. !
! 0. - 6. - 6. 12. !
```

-->b

b =

```
! 60. !
```

```
! 0. !  
! 20. !  
! 0. !
```

```
-->a \ b  
ans =
```

```
! 13.333333 !  
! 14.166667 !  
! 15.833333 !  
! 15.      !
```

2.

3.

Referências Bibliográficas

- [1] Courant, Richard *Gauss and the present situation of the exact sciences* in The Spirit and the uses of the Mathematical Sciences - McGraw-Hill - paperbacks - 1969
- [2] R. Feynman et alii *Feynman lectures on Physics* - Addison-Wesley - 1963
- [3] *Gnuplot - um pacote para fazer gráficos*
gnuplot tem um manual que você acessa com help comando, por exemplo help plot mostra como usar o comando plot. O manual acompanha o programa, no formato pdf, que você pode imprimir.
<http://www.gnuplot.info>
- [4] Jim Hefferon *Linear Algebra* - a free text from Mathematics - Saint Michael's College - Colchester, Vermont USA 05439 - 2002
<http://joshua.smcvt.edu/math.html>
- [5] Hilbert, David *Grundlager der geometri*
- [6] Morris W. Hirsch e Stephen Smale *Differential Equations, dynamical systems and linear algebra* Academic Press - 1973
- [7] Anil K. Jain *Fundamentals of Digital Image Processing* - Prentice Hall - 1989
- [8] Lang, Serge *Estruturas Algébricas*
- [9] Nachbin, Leopoldo - *Introdução à Álgebra*
- [10] *GNU Octave, version 2.0.16.92 (i386-pc-linux-gnu)*.
Copyright (C) 1996, 1997, 1998, 1999, 2000 John W. Eaton -
University of Wisconsin - Madison - software livre.
- [11] SIAM - Society for Industrial and Applied Mathematics - *News*
<http://www.siam.org>
- [12] Praciano-Pereira, T. *Cálculo numérico Computacional* -
<http://www.uvanet.br/matematica/livros.php>

- [13] *Coletânea de programas em Pascal* arquivo pas.zip - 1999
<http://www.uvanet.br/matematica/livros.php>
- [14] *Análise harmônica e não harmônica* Pre-publicação - Dep. de Matemática
- Universidade Federal do Rio Grande - RS - 1998
- [15] Rodrigues dos Santos, José Stálio e Praciano-Pereira, Tarcisio *Introdução à Matemática Universitária* - edição preliminar - Laboratório de Matemática Computacional /Biblioteca Central UVA - 2003
<http://www.uvanet.br/matematica/livros.php>
- [16] Eric S. Raymond *XFree86-Video-Timings-HOWTO.html* - Se você usar Linux - veja </usr/doc/HOWTO/XFree86-Video-Timings-HOWTO.html>, se não solicite uma copia a esr@thyrus.com
- [17] Scientific Lab - programa de cálculo numérico matricial do grupo INRIA - programa de domínio público - <http://www.inria.fr>