Equações Diferenciais Ordinárias.

Tarcisio Praciano Pereira[1]

Universidade Estadual Vale do Acaraú
Sobral, 14 de janeiro de 2016

[1]tarcisio@member.ams.org

Sumário

Lista de Figuras

Introdução.

Este é um texto que tem o objetivo de servir ao *estudo dirigido* sobre *equações diferenciais* para ser usado como apoio ao ensino à distância. Você poderá utilizá-lo no seu projeto *autodidata* e neste caso pode contar com o meu apoio mas, observe que *ensino à distância* não pode significar ensino massivo, ao me procurar, compreenda que tenho limitações[1], use o endereço eletrônico tarcisio@member.ams.org

Sistema dinâmico

A forma "moderna" de se estudar *equações diferenciais* é como um *sistema dinâmico*. Colocamos aspas em *moderna* por duas razões, primeiro, esta forma "moderna" nasceu com Poincaré no fim do século 19, segundo porque aquilo que chamamos de "moderno" na verdade quer dizer "atual", isto é, *próprio da linguagem e da visão que adquirimos hoje.* Por isto foi preciso chegar a segunda metade do século 20 para que a *forma moderna, iniciada por Poincaré no fim século 19*, viesse a se impor como um *ambiente* natural para solução de uma equação diferencial.

Infelizmente neste primeiro volume não consegui atingir a "forma moderna" de estudar equações diferenciais porque há uma variada gama de pré-requisitos a serem utilizados que tornaria o texto inacessível aquele que deve se iniciar no estudo das equações diferenciais. E como esta iniciação é uma necessidade em si mesma, preferi separar o assunto em dois textos, no segundo a tônica será *sistema dinâmico*.

Mesmo assim os capítulos finais vão fazer uma pequena introdução aos *sistemas de dinâmicos* com enfase em gráficos e portanto numa forma intuitiva de apresentar o assunto. O objetivo é apenas para abrir a curiosidade e a perspectiva do leitor, seria interessante pelo menos abrir o véu do segredo de um sistema dinâmico.

Como toda introdução, esta foi feita depois que escrevi alguns capítulos, algumas partes da mesma foram escritas ao longo do trabalho representando o planejamento do mesmo, e naturalmente ela só pode ser bem entendida *depois*. Sugiro que você faça uma leitura rápida desta introdução e que retorne posteriormente para relê-la quando já tiver adquirido alguma visão do texto, mesmo parcial, do texto.

Curva solução

Em algumas situações uma *curva-solução* de uma equação diferencial tem sentido e uso, mas na maioria das vezes o que é significativo saber é como se comportam "todas" as soluções que passam na vizinhança de um ponto (a, b) que é o centro do interesse.

Considere um rio, talvez ainda exista algum a sua volta, (aproveite para vê-lo e tomar um banho se ainda não tiver virado esgoto). É possível identificar num rio o conjunto das trajetórias de todas as partículas de água que fluem.

Num determinado ponto do rio, "inexplicavelmente" e sobre tudo "desagradavelmente" se forma sempre um banco de areia que atrapalha a navegação. A areia é transportada de longe e das vizinhanças pelo conjunto de moléculas da água, cada uma das quais é uma das partículas em movimento que formam o seu fluxo. Ao estudarmos este fluxo em seu conjunto podemos chegar a con-

[1] entendo que *ensino à distância* vem de encontro ao problema ecológico de economia de energia e não de degradação da qualidade do ensino

clusões globais que respondam o porque do tal banco de areia inexplicável e desagradável, e sobre tudo podemos formular uma solução para o problema envolvendo ou não a existência do banco de areia como uma peça definitiva e agradável do rio em seu conjunto, é isto que significa *ecológico*, *compreender a natureza e passar a conviver com ela com alterações mínimas que a protejam nos deixando usufruir de seus bens*.

Somente a visão do rio, como um sistema dinâmico, é possível nos dar esta resposta, nunca a visão unitária de uma *solução particular de uma equação diferencial* pode nos levar a tal compreensão. Uma *solução particular* fica representada, na figura (fig. 1) por cada uma das curvas que ali podemos identificar. Uma solução particular é uma curva que conseguimos isolar passando por um determinado ponto, este ponto se chama *condição inicial*.

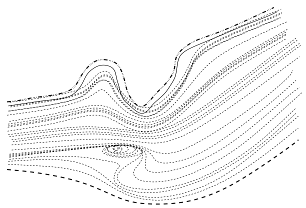


Figura 1: Um banco de areia no fluxo do rio

Uma outra visão: tudo, absolutamente tudo, se explica como sistemas dinâmicos, a economia, o movimento dos planetas, o comportamento de um motorista no tráfego ou comportamento relativo preda-predador de uma coleção qualquer de animais de um sistema, (includindo aí o homem). Observe que aqui há vários exemplos, vários sistemas. Vou Considerar um deles, para ser mais pedagógico, por exemplo o comportamento de vários seres vivos em iteração, o Homem, a Flora e a Fauna em uma certa região geográfica. Podemos reinterpretar a (fig. 1) como representativa deste sistema, em que cada curva poderia representar uma das categorias acima mencionadas: o Homem, uma curva, cada tipo de animal, outra curva, cada espécie da Flora, outra curva e o banco de areia representa um momento em que encontramos uma perturbação, *interessante* ou *preocupante* no conjunto dos comportamentos iteração entre estas espécies. Aquilo que no exemplo anterior, identifiquei como um *banco de areia*, nesta nova interpretação pode representar uma súbita escassez de alimentos que afete todas as populações numa certa vizinhança, no meio geográfico que elas ocupam.

Ou seja, uma mesma equação diferencial serve para modelar fenômenos bem diferentes, e você verá que os *coeficientes* é que vão funcionar, como os botões de uma aparelhagem sonora, para sintonizar a equação com os objetivos do estudo desejado.

Estabilidade

A estabilidade é um outro conceito muito importante e é possível encontrarem-se exemplos simples dele a nossa volta.

Frequentemente compararmos dois *sistemas dinâmicos*, dentro de um dos quais está o outro: sistema e subsistema.

É preciso levar em consideração o *relógio universal de cada um dos sistemas* para avaliarmos a distorção que um deles oferece sobre o outro.

Por exemplo, o relógio do Universo planetário tem "segundos" que valem para o nosso relógio biológico "milhões de anos" isto nos dá sensação de *estabilidade* que absolutamente não tem o Universo. Veja o evento astronômico que alguns de nós presenciou em 2003, quando Marte e a Terra estiveram mais próximos, com Marte num desvio de sua órbita natural atingindo a proximidade máxima da Terra em 27 de Agosto de 2003. Nesta data Marte se mostrou aos observadores terrestres com o tamanho aparente da Lua. Quem tiver nascido então, não acreditará no que vimos, quando qualquer um de nós lhe contar esta história dentro de 10 ou 15 anos, porque, quem estiver nascendo agora não terá mais a possibilidade de presenciar este evento em toda sua vida, e para ele Marte será *sempre* um longínquo ponto luminoso perdido entre as estrelas do Universo. O próximo segundo no relógio astronômico em que um tal evento venha a ocorrer, corresponde para nós a alguns milhares de anos (60.000 anos) durante os quais Marte será *sempre* o mesmo ponto luminoso perdido entre as estrelas do Universo.

Falamos de um dos conceitos fundamentais da teoria, habilidosamente criado por Poincaré, *estabilidade*. Em palavras simples, "estabilidade" é a propriedade de manutenção das características das soluções nas vizinhanças de um ponto, por exemplo, parece que na Terra, depois da noite sempre virá o dia..., a pergunta é até quando? porque depois de um "segundo" do relógio do Universo esta "estabilidade" pode se perder. O aquecimento global que se avizinha poderá alterar pelo menos um pouco o relógio da Terra, *e se isto acontecer, como ficarão os sistema biológicos que vivem aqui, dependentes do relógio terrestre?*

Ou se lhe parecer violento este exemplo, pense noutro. Para o relógio biológico de um inseto, de uma mosca, um segundo do seu relógio é para o dela alguns milhares de segundos. Ela nasce e morre entre duas gripes que você tenha e guardaria, se tivesse alguma especie de consciência, *no sentido que nós entendemos consciência*, a impressão que sua saúde é de uma "estabilidade" invejável. O estudo da *estabilidade* de seu sistema biológico pode levá-lo a, pelo menos, a reduzir os impactos das gripes... ou talvez conseguir programá-las para curti-las com calma nos fins de semana...

Estas palavras devem lhe explicar o sentido que desejamos dar ao curso de equações diferenciais que lhe apresentamos. O estudo de uma solução isolada, *uma solução particular* é pouco, como seria inútil o estudo da curva de sua saúde isolada do estudo da saúde das pessoas com quem você convive, ou das curvas-trajetórias das partículas no fluxo do rio, isoladamente.

O que eu disse acima aponta para o estudo das *equações diferenciais* sob a forma de *sistemas dinâmicos*, mas é preciso observar que algumas vezes interessa, sim, uma curva-trajetória isolado, para um remador num caiaque, num rio, lhe interessa exatamente uma das trajetórias, aquela onde as partículas (de água) tem maior velocidade, é em cima desta trajetória que ele vai colocar o caiaque.

Capítulo 1

Gráficos, equações, modelagem

Uma equação diferencial é uma *equação funcional*, quer dizer, uma expressão como

$$G(f) = 0$$

em que G é *uma expressão sintaticamente correta* do ponto de vista da Matemática envolvendo f e suas derivadas, sendo f uma variável do "tipo" `função`. Por exemplo,

$$f' = x \equiv f' - x = 0 = G(f)$$

é uma *equação diferencial* e sua solução é

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + C$$

em que C é uma constante qualquer. Como equações diferenciais são *equações funcionais*, resolver a equação $G(f) = 0$ significa encontrar a classe mais ampla de funções que torne a expressão $G(f) = 0$ verdadeira.

Uma equação diferencial é uma *expressão envolvendo um símbolo, por exemplo y*, que representa uma função duma *variável*,x, t, alguns símbolos representando as derivadas de y relativamente a algumas destas variáveis, e operações *aritméticas* colocando estes símbolos dentro dum expressão "*aritmeticamente correta*.

É isto que o símbolo $G(f) = 0$ significa. Para termos uma *equação* é preciso que em algum momento na expressão apareça uma igualdade seguida dum segundo membro, ora, podemos deixar tudo no primeiro membro de modo que no segundo membro fique apenas *zero*.

Neste capítulo vamos ver exemplos de `equações funcionais`, algumas equações diferenciais, e vamos discutir um "tipo de dado" mais amplo, as *curvas*, que podem ser soluções de uma *equação diferencial*. Vamos também repassar os métodos clássicos com que se apresentavam as *equações diferenciais* porque, de alguma forma, eles continuam necessários.

1.1 Classificação das equações

A Humanidade sabe muito pouco sobre equações diferenciais, na verdade deveríamos dizer que o conhecimento que temos sobre este campo do conhecimento é difuso e confuso porque na verdade se sabe muita coisa mas sem formar uma teoria unificada.
Na busca para entender e resolver as equações diferenciais foram sendo feitas classificações das mesmas e isto tornou possível o avanço do assunto, (ou talvez tenha impedido um avanço maior...)

Há vários métodos para classificar as equações. O leitor, entretanto, não se perca em decorar nomes. Considere esta classificação como um passeio sobre alguns exemplos de equação.

Cabe aqui alertar o leitor que o texto pode ser difícil em alguns momentos porque estarei dando exemplos *avançados* de equações. O objetivo, aqui, não é a resolução, mas um simples passeio pelo *mostruário* das equações para sugerir a riqueza que este instrumento nos oferece. Você também irá aos poucos observar que é preciso uma *linguagem* mais sofisticada para *falar equações diferenciais*, e como toda *linguagem*, esta deve ser adquirida aos poucos, é um dos métodos que estou usando neste livro: *falar desde o início de tópicos de que vou precisar apenas mais adiante*, usando exemplos para introduzi-los, a prática nos ensina que esta é uma forma de ir habituando as orelhas com os novos conceitos.

Um dos conceitos menos traumáticos, mas que já oferece uma dificuldade para o iniciante, são os *coeficientes*, uma vez que para as equações diferenciais há um salto qualitativo no significado dos coeficientes. E não há nada estranho neste fato, estamos trabalhando com equações que envolvem o objeto função, uma consequência simples da Álgebra é que os *espaço* com que vamos as operações algébricas seja um espaço de funções. Os coeficientes, nas equações diferenciais, são funções.

Vou também aproveitar para resolver algumas equações simples que já foram objeto dos seus estudos em *Cálculo*, nestes casos eu estarei lhe mostrando que o assunto não lhe é completamente estranho.

1.1.1 Equações diferenciais ordinárias

- As equações
$$\frac{dy}{dx} = k; \ \frac{dy}{dx} = ky \ ; \ \frac{dy}{dx} = kx \tag{1.1}$$
são exemplos de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, porque
  - apenas envolvem a primeira derivada;
  - a solução destas equações são curvas, objetos de dimensão 1, ou ainda *variedades diferenciáveis* de dimensão 1.

  A equação $\frac{dy}{dx} = k$ significa que *a derivada de y é a constante k*. Uma curva que tem esta propriedade é uma reta com coeficiente angular $\underline{k}$. O coeficiente angular é a derivada.

  Então a solução desta equação é
$$\frac{dy}{dx} = k \quad \Rightarrow \quad y = kx \tag{1.2}$$
mas há outras soluções. Se somarmos uma constante qualquer à solução acima vamos encontrar uma outra reta que tem o mesmo coeficiente angular $\underline{k}$. Portanto a solução completa é
$$\frac{dy}{dx} = k \quad \Rightarrow \quad y = kx + C \tag{1.3}$$
Veja na figura (1.1) página 5, algumas soluções da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = -1$, uma família de retas paralelas.

  É assim, a solução de uma *equação diferencial ordinária* é uma família de curvas. Esta equação é uma das muitas que você resolveu no *Cálculo* quando calculou primitivas. Todas as equações deste tipo tem por solução uma *família de curvas paralelas*
$$\frac{dy}{dx} = f \quad \Rightarrow \quad y = F(x) + C \ ; \ F'(x) = f(x) \tag{1.4}$$
F é uma *primitiva* de f.

  As outras duas equações
$$\frac{dy}{dx} = ky \ ; \ \frac{dy}{dx} = kx$$
também estão ligadas com os seus estudos do Cálculo mas vão exigir um pouco mais de trabalho e vou deixá-las para depois.

- A equação
$$(\frac{dy}{dx})^2 - 4y + 4 = 0 \tag{1.5}$$

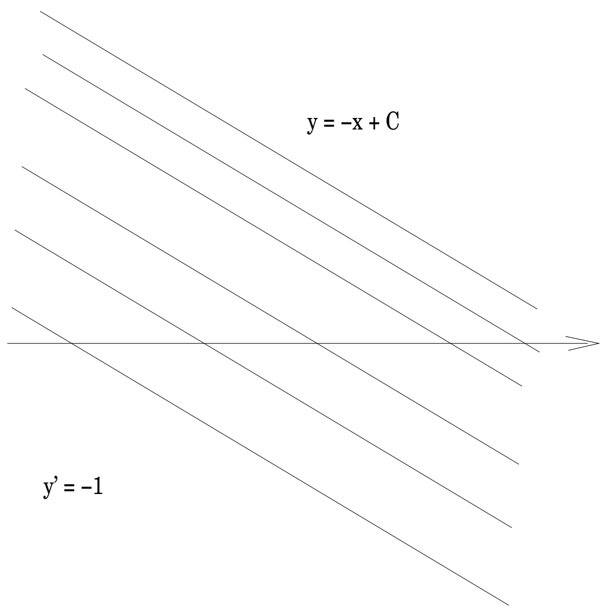


Figura 1.1: Retas paralelas - soluções de uma e.d.o.

é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, porque a maior ordem de derivação é a primeira, e do segundo grau, porque a "variável", $\frac{dy}{dx}$ se encontra ao quadrado (segundo grau).

$$(\frac{dy}{dx})^2 - 4y^3x^5 + 4 = 0 \tag{1.6}$$

é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem e do terceiro grau, a variável $\underline{y}$, está no terceiro grau. Observe que $\underline{x^5}$ é um coeficiente (variável), veja a próxima classificação.

Este é um exemplo de equação difícil e que nos obriga a usar métodos complexos envolvendo inclusive questões algébricas.

- A equação

$$(\frac{dy}{dx})^2 - 4y^3x^5 + 4 = 0 \tag{1.7}$$

pode ser escrita (ou apresentada) assim

$$(\frac{dy}{dx})^2 + a(x)y^3 + b = 0 \tag{1.8}$$
$$a(x) = -4x^5 \ ; \ b = 4 \tag{1.9}$$

salientando que os coeficientes são funções *não necessariamente constantes.*

- As equações

$$\frac{d^2y}{dx^2} = k; \tag{1.10}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 4y = 0 \tag{1.11}$$

são equações diferenciais ordinárias de segunda ordem porque nelas intervém a segunda derivada.

- As equações

$$3\frac{d^2y}{dx^2} = kx; \tag{1.12}$$
$$3\frac{d^2y}{dx^2} - kx = 0; \tag{1.13}$$
$$\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} - 4xy = 0 \tag{1.14}$$

são equações a coeficientes variáveis. Na equação (12) o único coeficiente variável é o termo que se encontra depois da igualdade, e não é constante. A expressão que se encontra na equação (13) é uma forma equivalente àquela que se encontra na equação (12) em que fica visível que

$$a(x) = kx$$

é o coeficiente de $y^0 = 1$, logo um coeficiente variável.

As equações com coeficientes variáveis se revelam muito importantes nas aplicações porque é a variação dos coeficientes que vai nos permitir captar a influência do meio externo sobre um fenômeno cujo comportamento conhecemos apenas experimentalmente (através das medições feitas por sensores) e que conseguimos traduzir com uma equação diferencial semelhante a outra equação diferencial que a experiência nos diz que se aplica em casos parecidos.

Casos típicos é o estudo de populações (bactérias) submetidas a alterações do meio que as circundam ou questões ambientais em que o diversos seres vivos interagem e todos se encontram submetidos a "clima" e às alterações do clima. As populações tem um comportamento (crescimento) exponencial, mas a experiência nos indica que *repentinamente* o crescimento de uma determinada população entra em colapso e isto pode ser captado por uma mudança nos coeficientes que até então eram constantes...

Os coeficientes variáveis representam, usando uma linguagem metafórica, *botões* com que podemos alterar as condições externas de uma equação diferencial e nós veremos mais a frente que estes coeficientes podem ser usados para captar alterações medidas com sensores, e neste caso os coeficientes variáveis representam funções das quais apenas conhecemos os valores nos *nós* de uma malha colocada sobre a região que é o domínio da equação diferencial.

Podemos ver de imediato um simples exemplo que mostra o *poder* dos coeficientes variáveis.

$$\frac{dy}{dx} = -1 \iff y' + 1 = 0 \tag{1.15}$$
$$\frac{dy}{dx} = -x \iff y' + x = 0 \tag{1.16}$$

são dois exemplos da mesma equação, num caso o *coeficiente* é variável. Observe que eu escrevi as duas equações com formas equivalentes, entretanto uma destas formas é mais *prática* para a resolução da equação (uma questão puramente psicológica porque as duas formas são equivalentes).

As soluções das duas equações são

$$\frac{dy}{dx} = -1 \Leftarrow y = -x + C \tag{1.17}$$
$$\frac{dy}{dx} = -x \Leftarrow y = -\frac{x^2}{2} + C \tag{1.18}$$

Veja na figura (1.2) página 8, a família de parábolas paralelas solução da equação (18). A diferença entre as equações é que, numa o termo independente é constante, na outra o termo independente é variável.

1.1.2 Equações diferenciais parciais

- A equação
$$\frac{\partial u}{\partial x} = sen(x) \tag{1.19}$$
é uma *equação diferencial parcial* de primeira ordem.

  O adjetivo *parcial* indicando que a *variável do tipo função* que resolve esta equação diferencial, *depende* de duas variáveis.

  A solução desta equação diferencial é uma *variedade* de dimensão dois, uma *superfície*.

  Embora as equações diferenciais parciais sejam bem mais difíceis de serem resolvidas, este é um exemplo de equação diferencial parcial *fácil* de se resolver. Para isto calculamos a primitiva *relativamente à variável x* obtendo
$$u(x, y) = -cos(x) + C$$
entretanto C deve ser considerada uma função da variável y o que nos leva a escrever a equação como
$$u(x, y) = -cos(x) + C(y)$$

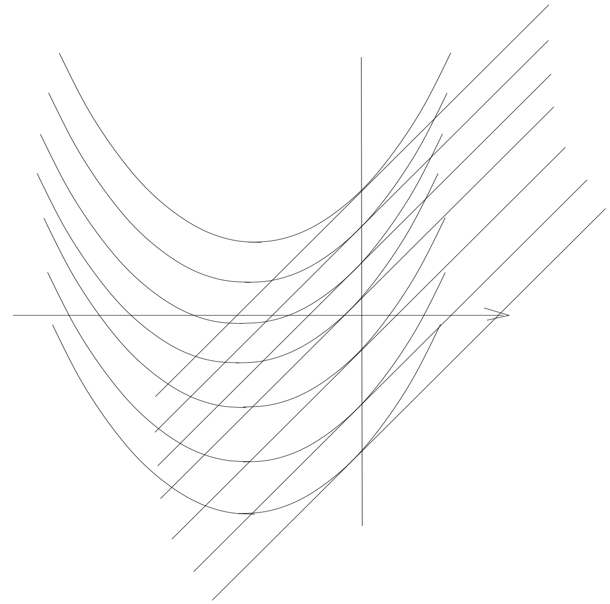


Figura 1.2: Família de parábolas paralelas

  e você pode verificar que
$$u(x, y) = -cos(x) + y; \tag{1.20}$$
$$u(x, y) = -cos(x) + sin(y); \tag{1.21}$$
$$u(x, y) = -cos(x) + y + C; \tag{1.22}$$
são três exemplos de solução da equação (19). Isto pode ser verificado calculando-se a derivada parcial de qualquer um dos exemplos nas equações, (20), (21), (22).

- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ é uma equação diferencial parcial de segunda ordem chamada de *equação de Laplace*.

- O símbolo
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{1.23}$$
se chama *Laplaciano* e podemos reescrever a equação anterior com
$$\Delta u = 0 \tag{1.24}$$
porque a derivação é linear:
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})u = \Delta u \tag{1.25}$$
A definição de *homogeneidade* esta ligada a um tipo de equação que chamamos de *linear* porque a sua solução é feita com as técnicas da *Álgebra linear* onde as equações se dividem em *homogêneas* e *não homogêneas*, voltaremos a esta questão no capítulo 0.

  Você pode reconhecer uma propriedade das funções lineares na seguinte definição

  Definição 1 (homoegeneidade) *Equação diferencial Homogênea*

  Escreva a equação diferencial na forma compacta que aparece logo no início deste capítulo
$$G(f) = 0$$
se for verdade que $G(\lambda f) = \lambda G(f)$, para qualquer número real (ou complexo) λ, então a equação é homogênea.

  A equação de Laplace (exercício) é um exemplo de equação de homogênea.

  Damos um nome a este tipo de equação porque em vários casos importantes a solução da equação *não homogênea* se deduz da solução da equação homogênea. A equação (19) é também uma *equação homogênea*.

- $$a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{1.26}$$
é uma equação diferencial parcial de segunda ordem chamada equação do calor. Observe que esta equação se escreve
$$a^2 \Delta u = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{1.27}$$
e neste caso interpretamos $\underline{u}$ como função de duas variáveis dependendo de um "parâmetro" que identificamos como sendo o tempo. Verifique, como exercício, que se trata de uma equação homogênea.

  As equações que *dependem do tempo* nós as chamamos de *dinâmicas* e as que não dependem do tempo, chamamos de *estacionárias*.

  O coeficiente aparece ao quadrado porque se quer caracterizar que é um número positivo.

- $$a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.28}$$
é uma equação diferencial parcial de segunda ordem chamada equação da onda.

  Como a equação do calor, esta equação pode ser escrita usando-se o *Laplaciano*
$$a^2 \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.29}$$
e a consideramos uma equação dinâmica, porque depende do tempo.

A expressão
$$F(t, x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, ..., \frac{d^n y}{dx^n}) = 0$$
representa a forma geral de uma equação diferencial ordinária de ordem n e algumas vezes é interessante colocá-las sob esta forma.

Resolver uma equação diferencial é, em geral, uma tarefa difícil e a solução de uma equação à coeficientes variáveis em geral é ainda bem mais complicada e a resolver *equações diferenciais parciais* depende da solução de algumas *equações diferenciais ordinárias*.

Observe que o objetivo, com esta frase, não é o de desestimular o estudo, deste campo do conhecimento, pelo contrário,

- representa uma caracterização de que você está se iniciando numa área em franco progresso onde há muito que fazer
- também é preciso compreender que o difícil não é *impossível* e nem sequer um *assunto para entes superdotados*, é apenas uma questão que precisa de mais investimento pessoal para se chegar a resultados interessantes.

É assim o estudo das *equações diferenciais*.

1.1.3 Domínio de uma equação

Considere a equação diferencial ordinária
$$\frac{1}{x^2}\frac{d^2 y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} - 4xy = 0 \tag{1.30}$$
que já classificamos acima como *ordinária e a coeficientes variáveis* sendo também homogênea.

É preciso observar que os *coeficientes* não são um apêndice *menor* numa expressão.

Aqui, nas equações diferenciais, os coeficientes, ao serem *variáveis*, influenciam até mesmo no domínio em que a equação se encontra definida.

No caso da equação (30), ela está definida em uma região não conexa do plano, porque o domínio se encontra dividido pela reta $x = 0$.

Esta reta, $x = 0$, se encontra na fronteira do domínio, e temos que verificar se a fronteira também não é uma solução, são as soluções chamadas *singulares* que não aparecem nas contas "normais", *exatamente* porque elas são excluídas quando vamos fazer as contas. Adquira o hábito, quando excluir uma expressão, retorne, para verificar se ela satisfaz a equação diferencial, você poderá ter perdido uma solução.

Exercícios 1 1. *Variedades lineares*

(a) *Encontre*[1] *as equações da retas que passam nos pares de pontos:*

a) $(1,3),(3,5)$	*b)* $(-3,5),(5,0)$	*c)*$(2,0),(7,0)$	*d)* $(4,3),(4,7)$

(b) *Encontre*[2] *as equações da retas que passam nos pontos indicados com o coeficiente angular* m *:*

a) $(1,3), m = -3$	*b)* $(-3,5), m = 2$	*c)*$(2,0), m = -7$	*d)* $(4,3), m = -1$

(c) *Encontre*[3] *a equação da reta que passa no ponto* $(3,4)$ *e é perpendicular ao vetor* $(-4,3)$.

(d) <u>*Variedade linear tangente*</u>

i. *Encontre*[4] *a equação da reta tangente ao gráfico de*

$$y = f(x) = x^2 + x - 6$$

nos pontos
a) $x = -3$ *b)* $x = 2$

ii. *Decida (e justifique) se é verdadeira a frase:* " no item anterior você lidou com a Fórmula de Taylor".

(e) *Encontre*[5] *a equação do plano que passa no ponto* $(1,2,3)$ *sendo perpendicular ao vetor* $(1,-2,4)$.

(f) *Encontre*[6] *a equação do plano que passa pelos pontos* $A, B.C$ *indicados e calcule um vetor perpendicular ao plano.*

a) $A = (1,2,-5)$	$B = (-1,2,-11)$	$C = (3,5,-11)$
b) $A = (1,2,2)$	$B = (-1,2,-4)$	$C = (3,5,-13)$
c) $A = (1,2,-24)$	$B = (-1,2,-30)$	$C = (3,5,-39)$
d) $A = (-4,-4,13)$	$B = (-4,4,5)$	$C = (0,0,5)$

2. <u>*Variedade linear tangente*</u>

[1]não faça, se você souber fazer ...
[2]não faça, se você souber fazer ...
[3]não faça, se você souber fazer ...
[4]não faça, se você souber fazer ...
[5]não faça, se você souber fazer ...
[6]não faça, se você souber fazer ...

(a) *Encontre*[7] *a equação do plano tangente à superficie de equação*

$$z = f(x,y) = x^2 + 3xy + y^3$$

no ponto P *indicado:*

a) $P = (1,2,15)$	*b)* $P = (-1,2,3)$	*c)* $P = (3,5,179)$
d) $P = (-1,2,3)$	*e)* $P = (-1,-2,-1)$	*f)* $P = (-3,-5,-71)$

(b) *Decida (e justifique) se é verdadeira a frase:* " no item anterior você lidou com a Fórmula de Taylor".

(c) *Em cada caso do item 2a, explicite o vetor vetor normal à superfície, no ponto indicado.* <u>Vetor normal</u> *é unitário e deve apontar para a direção externa à superfície, para conseguir isto, faça o produto vetorial de dois vetores tangentes unitários, no* sentido do movimento dos ponteiros do relógio *, (use a fórmula do determinante).*

3. *Classifique as equações diferenciais abaixo*

a) $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial y \partial} = 0$	*b)* $\frac{\partial^3 y}{\partial y \partial x^2} = 4$	*c)*$y'' + 3y' + 4y = 5$
d) $y' = 7$	*e)*$xy'' + 3xy' + 5 = 0$	*f)* $\frac{y''}{x^2+1} + xy' + 2xy = 0$
g)$xy' = 0$	*h)* $xy'' = 0$	*i)*$y' = 4x$
j) $y'' + 3y' = 3x$	*k)*$\frac{x^2 \partial^2 y}{\partial x^2} = 0$	*l)* $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x\frac{\partial y}{\partial x} = 0$

4. *Discuta o domínio de validade de cada uma das equações na questão anterior.*

5. *Resolva as equações que você souber resolver no item anterior.*

6. *Verifique que a* equação de Laplace *e a* equação da onda *são equações diferenciais homogêneas.*

7. *Descreva, com suas palavras, qual é a diferença entre as equações* da onda e do calor *e quais são as semelhanças entre estas duas equações.*

8. <u>*equações diferenciais do Cálculo*</u>

(a) *O coeficiente angular de uma curva é constante e vale 5. Qual é a equação desta curva ?*

(b) *O coeficiente angular de uma curva, em cada ponto x vale 3x. Qual é a equação desta curva ?*

(c) $\nabla(f) = (2,3)$

(d) $\nabla(f) = (2x,2y)$

9. *Determine todas as funções* f *tal que*

[7]Pare quando não houver mais dúvida ...

a) $f' = 0$ *b)* $f' = 3$
c) $f' = ax + b \; ; a, b \in \mathbf{R}$ *d)* $f' = (3x, 4x)$

e faça os gráficos das soluções encontradas.

A *fração de Leibniz*, ou como ela é mais conhecida, *a notação de Leibniz* se encontra entre as expressões mais controversas da Matemática:

$$\frac{dy}{dx}$$

Vou mostrar que ela se comporta como uma fração embora não seja tal.

De início uma breve "*história*[8]". Esta "*fração*" está intimamente associada com um conceito que atrapalhou muito a Matemática produzido pelos que criaram o Cálculo Diferencial, *Infinitesimal* e Integral enquanto eles procuravam entender o que era *limite* e *número*. Um das dificuldades fundamentais que eles tinham era de entender o comportamento de quocientes em que tanto o numerador como o denominador teriam limite nulos, e este é o caso das derivadas.

Foi quando inventaram a *noção* de *infinitesimal* extremamente complicada e confusa e que na verdade nunca foi devidamente construída como um conceito. Os *infinitesimais* somente foram devidamente compreendidos quando Landau construiu a sua *notação de Landau* em que ele consegui deixar claro que havia ordens de grandeza diferentes entre as sucessões que convergiam para zero. Confira a *notação de Landau.* Era o que se pretendia com os *infinitesimais*, ou ainda, os *infinitesimais* nada mais eram do *classes de sucessões que convergiam para zero* e você pode entender bem isto analisando a construção dos números reais via sucessões de Cauchy.

Se o numerador e o denominador na fração cujo limite se calcula, tiverem a mesma ordem de grandeza então o limite vai ser um número k que mede a *ordem de grandeza relativa* entre numerador e numerador. Se eles não tiverem a mesma *ordem de grandeza*, então o limite pode ser zero ou infinito. Será zero se a ordem de grandeza do numerador for inferior a ordem de grandeza do denominador, e infinito no caso contrário. O método de L'Hôpital decifra a relação entre as ordens de grandeza saltando para a derivada dos termos da fração.

O símbolo de Leibniz para derivadas, embora não seja nenhuma fração, no sentido de que não existem valores que possamos escrever no numerador e no denominador para obter um cálculo, se comporta como se fosse e era para os antigos construtores do Cálculo um *quociente de infinitésimos.*

Em operações de diferenciação, ela funciona como se fosse uma fração, no sentido de que ela permite transformações que se operam como se formalmente fossem um quociente de expressões.

Considere um exemplo para tentar o *desvendar o segredo* da contradição do que acabei de apresentar-lhe.

[8]E seja crítica a respeito da minha invasão em história, eu não sou historiador e vejo a história da Matemática do ponto da evolução que ela teve para o meu uso hoje.

Considere a seguinte sequência de expressões:

$$z = F(x,y) = x^2 + y^2 \tag{1.31}$$
$$dz = 2xdx + 2ydy \tag{1.32}$$
$$z = F(x,y) = c \; ; \; c \geq 0 \;\; \Rightarrow \;\; dz = 0 = 2xdx + 2ydy \tag{1.33}$$
$$\tfrac{dy}{dx} = -\tfrac{2x}{2y} = -\tfrac{x}{y} \tag{1.34}$$

Vou agora fazer cálculos semelhantes e observe a comparação final:

$$z = F(x,y) = x^2 + y^2 \tag{1.35}$$
$$z = F(x,y) = x^2 + y^2 = c \; ; \; c \geq 0 \;\; \Rightarrow \;\; y = \sqrt{c - x^2} \tag{1.36}$$
$$y' = \tfrac{-2x}{2\sqrt{c-x^2}} = -\tfrac{2x}{2y} = -\tfrac{x}{y} \tag{1.37}$$
$$y' = \tfrac{dy}{dx} = -\tfrac{x}{y} \tag{1.38}$$

No bloco de equações (eq. 31) apliquei as regras da Álgebra a expressão obtida com *derivação implícita* e defini, ainda usando as regras da *Álgebra*, a expressão $\frac{dy}{dx}$.

No segundo módulo, (eq. 35), fiz uma *operação lógica* ao passar para a equação (eq. 31), usando a definição de derivada para obter uma nova expressão, a (eq. 37). Observe que esta passagem não é algébrica, é uma dedução usando as regras da lógica. A partir desta equação apliquei as regras da Álgebra e cheguei à mesma expressão obtida no final do primeiro módulo com *derivação implícita.*

Existe uma explicação para o que se passa entre os dois módulos acima, mas neste momento é mais simples aceitá-los como um exemplo que justifica porque podemos considerar a *notação de Leibniz* como se fosse uma fração, porque ela funciona como tal. Observando que em dx não tem x...

A forma de demonstrar que isto é sempre possível, a forma demonstrar que a *fração de Leibniz* funciona como uma fração pode ser vita como consequência do *Teorema da Função implícita*[9] que é a justificativa *lógica* da possibilidade de *explicitar* expressões da forma $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c$ relativamente a uma das variáveis, obtendo uma outra expressão, deduzida desta, por uma dedução lógica.

Estamos falando de que há deduções algébricas e deduções lógicas, algumas vezes as expressões não serão algebricamente equivalentes, (ou consequências algébricas) mas sim, logicamente equivalentes (ou consequências lógicas), como é o caso da notação de Leibniz. A notação de Leibniz fica inteiramente explicada na *teoria das formas diferenciais* que foi burilada por Cartan no final da década de 50 do século 20.

Para terminar, podemos seguir usando as *frações de Leibniz* como se fossem frações, elas respeitam as regras do cálculo das frações até porque a construção dos números pode ser feita com usando as sucessões de Cauchy entre as quais existem a classe das que convergem para zero que são os *infinitésimos.*

[9]procure Teorema da Função Implícita

1.2 Testando soluções

Uma das formas de desenvolver a intuição sobre qualquer tipo de equação, consiste em testar se uma classe de objetos é solução da equação. Este foi um dos métodos muito usados no passado. Vamos aplicá-lo aqui em alguma equações.
Alguns dos exercícios vêm resolvidos, evite de ler a solução antes de fazer algum esforço para resolver o exercício. Você somente irá aprender aquilo que você construir.

Nos próximos exercícios você deve derivar expressões, eliminar constantes e assim deduzir equações diferenciais.

Exercícios 2 *A notação de Leibniz*

1. *Derive implicitamente as expressões seguintes, e, usando a notação de Leibniz, deduza uma equação diferencial das mesmas. Observe que as constantes devem ser eliminadas.*

   a)$x + 2y + 3ln|x + y - 2| = C$ b) $y = \frac{x+C}{ln(x)}$
   c) $2xy = 1 + K(x - 1)^2$ d) $x^2 + y^2 + 2Cxy + K = 0$
   e)$x^2 + 2xy - y^2 + 8y = C$ f) $x^3y + y^3x^2 = 5$

2. *Verifique que a expressão $F(x, y)$ é solução da equação diferencial.*

equação	$F(x, y)$
a)$3e^x tg(y)dx + (2 - e^x)sec^2(y)dy = 0$	$\frac{tg(y)}{(2-e^x)^3} = C$
b)$3e^x tg(y)dx + (2 - e^x)sec^2(y)dy = 0$	$x = ln(2)$
c)$(x^2y^2 - 1)dy + 2xy^3dx = 0$	$1 + x^2y^2 = Cy$
d)$(x^2y^2 - 1)dy + 2xy^3dx = 0$	$y = 0$
e)$xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$	$arcsen(\frac{y}{x}) = ln(Cx)$

Solução 1

(1.39)
(1.40)
(1.41)

3. *Encontre* `todas` *as soluções das equações diferenciais:*
   (a) $y' = 3;$
   (b) $y' = 3 + x;$
   (c) $y' = cos(x);$

4. *Trace algumas das* curvas integrais[10] *obtidas na questão anterior.*
5. *Encontre a solução da equação diferencial dada abaixo, que passa no ponto P indicado:*
   (a) $y' = 3$; $P = (4, 5)$
   (b) $y' = 3$; $P = (-4, 5)$
   (c) $y' = 3 + x$; $P = (-4, 5)$
   (d) $y' = cos(x)$; $P = (0, 5)$
6. *Faça os gráficos das soluções encontradas na questão anterior.*
7. *Explicite a variável $\frac{dy}{dx}$ e depois integre*
$$(\frac{dy}{dx})^2 - 4y + 4 = 0$$
8. *Transforme a equação $\frac{d^2y}{dx^2} = x(\frac{dy}{dx})^3$ num sistema de equações de primeira ordem e resolva a equação. Trace algumas curvas para esta equação.*
9. *Encontre um sistema de equações de primeira ordem que seja equivalente à equação*
$$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{dy}{dx} = 0$$
e resolva a equação
10. *Mostre que um círculo de centro na origem,*
$$\{(x, y) \ ; \ x^2 + y^2 = r^2$$
é tal que o vetor tangente $(\dot{x}, \dot{y})$ é perpendicular ao vetor posição (x, y). Escreva uma equação diferencial que traduza este fato geométrico.
11. *Verifique que a expressão $xy = log(y) + c$ resolve a equação diferencial*
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1 - xy}$$
12. *Verifique que tanto $y = sen(x)$ como $y = cos(x)$ são soluções de $y'' = -y$*
13. *Verifique que*
$$y = A_1 sen(x) + A_2 cos(x)$$
é solução de $y'' = -y$ para quaisquer constantes A_1, A_2 dadas.
14. *Tente descobrir qual é a equação que tem por solução a função*
$$y = A_1 sen(kx) + A_2 cos(kx)$$
para uma constante k.

[10]chamamos “curva integral” a uma solução de uma equação diferencial

15. *Verifique que $y(t) = cos(t) + isen(t) = e^{it}$ é um caso particular de solução da equação $y'' = -y$.*

16. *Verifique se $y = f(x)$ é solução da equação diferencial dada:*

$y = f(x)$	*equação*	$y = f(x)$	*equação*
a)$y = x^2 + c$	$y' = 2x$	*b)* $y = a_1e^{2x} + a_2e^{-2x}$	$y'' - 4y = 0$
c)$y = cx^2$	$xy' = 2y$	*d)* $x^2 = 2y^2ln(y)$	$y' = \frac{xy}{x^2+y^2}$
e)$y = ce^{kx}$	$y' = ky$	*f)* $x + y = atg(y)$	$1 + y^2 + y^2y' = 0$

17. *Classifique as equações diferenciais apresentadas na questão anterior.*

18. *Encontre a solução geral das equações:*

    (a) $y' = e^{3x} - x$ *(b)* $y' = xe^{x^2}$ *(c)* $xy' = 3$

19. *condição inicial*

    Definição 2 *Condição inicial Se chama* condição inicial *um ponto (a, b) por onde passa uma curva-solução de uma equação diferencial. Este ponto pode ser dado implicitamente. As condições iniciais individualizam uma determinada solução da equação diferencial*

    Encontre a solução particular que satisfaz à condição inicial dada:

    (a) $y' = xe^x$ $(1, 3)$ *(b)* $y' = xe^{x^2}$ $(0, \frac{1}{2})$ *(c)* $xy' = 3$ $(1, 6)$

1.3 Equações a variáveis separáveis

Vamos estudar, nesta seção, o tipo de equações diferenciais comum nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral e portanto um primeiro exemplo de equações diretamente ligadas à experiência do estudante, são as equações diferenciais que poderem ser fatoradas num produto de duas expressões, cada uma delas contendo apenas uma "variável":

$$F(x, y, y') \equiv f_1(x)dx = f_2(y)dy$$

e que por isto recebem o nome de *equações à variáveis separáveis.*

Numa equação diferencial não existem "*variáveis*" da forma como pensamos nos *parâmetros* da funções, aos quais se lhes pode dar um *valor* numérico.

De fato existem "variáveis" nas equações diferenciais, são as funções (ou curvas) cujas expressões podem ser substituídas nas equações diferenciais para se obter uma identidade: é a função *incógnita* que desejamos descobrir e que satisfaz a equação diferencial.

Se fizermos aqui uma restrição, dissermos que as soluções de uma equação diferencial são funções (na verdade são famílias de curvas) podemos dizer que uma *equação diferencial* é uma equação funcional, a incógnita é uma função.

A solução não é uma função, e sim uma *família de funções*, ou melhor, uma *família de curvas* no caso das equações diferenciais ordinárias.

Entretanto estas funções (ou curvas) se expressam através de variáveis e finalmente, por um erro histórico, terminamos nos referindo às variáveis *os parâmetros das soluções* como *variáveis das equações.* Um erro de linguagem que ninguém pensa seriamente em corrigir.

Este *erro* se consolidou ao longo do tempo, e temos que conviver com ele fazendo sempre introduções como esta.

Vamos considerar uma equação diferencial como uma expressão da forma

$$F(x, y, y') \tag{1.42}$$

uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, que possa ser *fatorada* como um "produto" de expressões univariadas

$$F(x, y, y') \mapsto f_1(x)dx = f_2(y)dy$$

Quando isto puder ser feito, facilmente[11] conseguimos "integrar" a equação diferencial:

$$\int_a^x f_1(t)dt = \int_b^y f_2(t)dt$$

em que $f_1(x)dx, f_2(y)dy$ são os *diferenciais exatos* que se podem obter de F.

Este método encontra aplicação frequente na solução das equações diferenciais. É uma *técnica* que tem valor por si própria.

Considere os exemplos que apresentamos a seguir, como exercícios resolvidos e tente desenvolvê-los, sozinho.

Exemplo 1 *Equações a variáveis separáveis*

Considere os exemplos como exercícios resolvidos, primeiro tente resolver a equação, depois leia a solução.

1. *Considere a equação diferencial $xdy = ydx$ para a qual podemos escrever a expressão "algebricamente equivalente"*

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

da qual podemos deduzir

$$ln(x) = ln(y) + C = ln(cy) \iff x = cy$$

que representa a família das retas que passa na origem com coeficiente angular $\underline{c}$. Este exemplo mostra que mesmo numa equação diferencial de

[11] pelo menos podemos escrever as integrais...

primeira ordem as soluções não precisam ser curvas paralelas. Neste caso temos uma família de retas concorrentes num ponto.

Este exemplo merece ser um pouco mais expandido. Em outro local deste livro você vai encontrar um teorema de existência e unicidade *para equações diferenciais de primeira ordem e o teorema vai afirmar que dado um ponto existe uma única*[12] *solução da equação diferencial passando por este ponto. Ora aqui temos como solução uma família de retas concorrentes em um ponto. Isto parece que nega o* teorema de existência e unicidade, *mas não é assim. Veja que o ponto comum as soluções é* $(0,0)$ *e que* $x = 0$ *ou* $y = 0$ *se encontram fora do domínio da equação. Você pode esperar que isto indica que existem situações limite a serem estudadas nas soluções das equações diferenciais, são os chamados* valores assintóticos *que podem ser simples pontos ou curvas. Os valores assintóticos são muito importantes, em geral eles descrevem* situações de fragilidade *de sistemas.*

Ao resolver esta equação tivemos que excluir $x = 0, y = 0$ *das contas, porém depois temos que voltar a discutir o que poderia acontecer considerando as situações limite representadas pelas relações inicialmente proibidas.*

2. *Na equação diferencial* $y' = -\frac{x}{y}$ *e façamos as seguintes transformações*

$$y' = -\frac{x}{y} \tag{1.43}$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \tag{1.44}$$
$$ydy = -xdx \tag{1.45}$$
$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \tag{1.46}$$
$$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = C \tag{1.47}$$
$$\tag{1.48}$$

Mostramos que a equação é a variáveis separáveis e calculamos a integral dos dois membros.

A constante C *pode ser qualquer número real positivo e as soluções desta equação diferencial é a família dos círculos de centro na origem com raio* $\sqrt{C}$.

A figura (1) página 21, mostra algumas soluções desta equação.

Neste caso vemos que as soluções não são funções mas uma família de curvas a um parâmetro, o parâmetro é $\sqrt{C}$, *o raio que determina cada elemento da família de curvas.*

Aqui também temos que fazer uma restrição, a equação não vale sobre o eixo OX, quando $y = 0$, *mas ao chegar ao resultado vemos que podemos*

[12] Este ponto se chama frequentemente uma condição inicial, onde começa a curva solução particular que nos interessa.

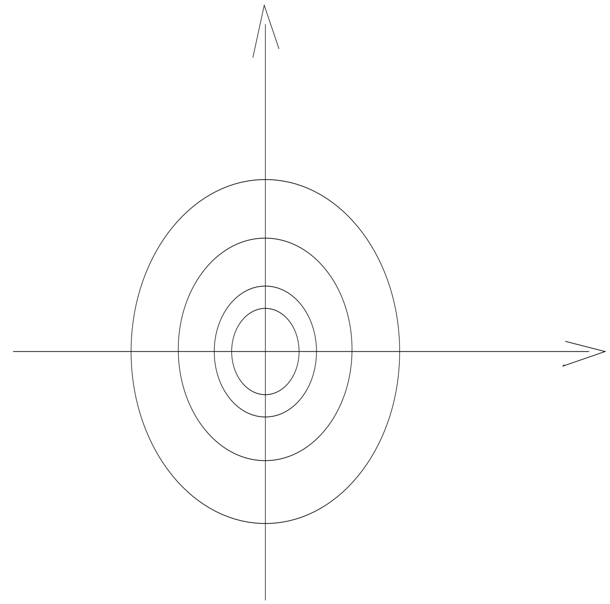


Figura 1.3: Uma família de círculos, solução de $y' = -\frac{x}{y}$

incluir os pontos problemas, onde a tangente as curvas não tem coeficiente angular porque são retas perpendiculares ao eixo OX.

3. $y' = \frac{1}{y}\ ; y \neq 0$

$$y' = \frac{1}{y} \tag{1.49}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \tag{1.50}$$
$$\frac{dy}{y} = dx \tag{1.51}$$
$$ln(|y|) = x + c \tag{1.52}$$
$$|y| = e^x e^c = Ke^x; K \neq 0 \tag{1.53}$$

Para cada par de valores $\pm K$ *temos duas exponenciais na família de soluções que pode ser vista na figura (2) página 22,*

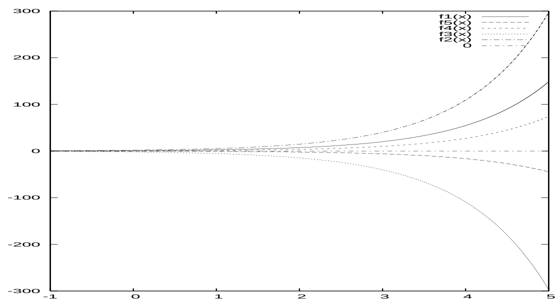


Figura 1.4: Família de exponenciais

4. *$y' = \frac{1}{y^2}$*
Se $y \neq 0$

$$y' = \frac{1}{y^2} \tag{1.54}$$
$$y^2 dy = dx \tag{1.55}$$
$$\frac{y^3}{3} = x + c \tag{1.56}$$
$$\tag{1.57}$$

É uma família de parábolas cúbicas que cortam o eixo OX quando $x = -c$ tangentes à reta perpendicular ao eixo OX neste ponto. A figura (1.5) página 22,

Exercícios 3 *Equações a variáveis separáveis*

1. *Verifique que as equações listadas são* a variáveis separáveis, *encontre a solução e teste a solução encontrada.*

$$(1 + x^2)y' + 2xy = 0 \tag{1.58}$$
$$2e^x tan(y)dx + (2 - e^x)sec^2(y)dy = 0 \tag{1.59}$$
$$y' sen(x) - yln(y) = 0 \tag{1.60}$$
$$(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0 \tag{1.61}$$
$$(1 + y^2)dx + xydy = 0 \tag{1.62}$$
$$x\sqrt{1 + y^2} + yy'\sqrt{1 + x^2} = 0 \tag{1.63}$$
$$(1 + e^2)yy' = e^y \tag{1.64}$$
$$(1 + y^2)(e^{2x}dx - e^y dy) - (1 + y)dy = 0 \tag{1.65}$$

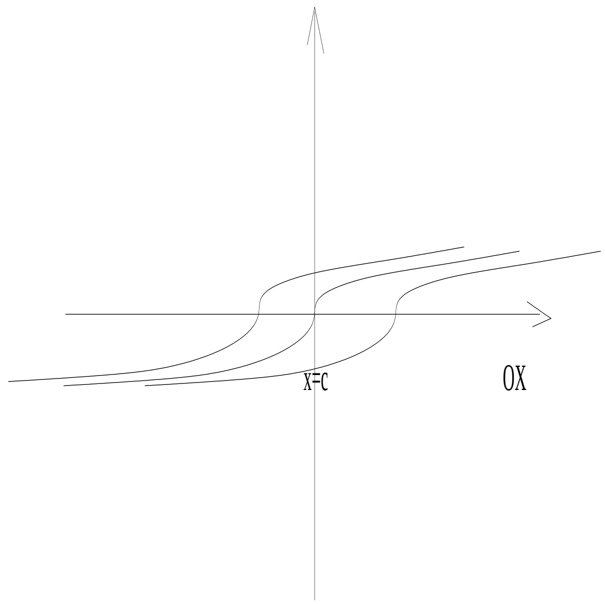


Figura 1.5: Parábolas cúbicas cortando OX perpendicularmente

2. *Verifique quais das equações propostas a seguir são* a variáveis separáveis. *Sendo o caso as resolva.*
   (a) $(x + 1)y' + y^2 = 0$
   (b) $y' = \frac{x^3}{y^2}$
   (c) $tan(x)cos(y) = -y'tan(y)$
   (d) $(x^2 - 4)y' = y$
   (e) $xyy' = 1 + x^2 + y2 + x^2y^2$
   (f) $yy' = e^{(x+2y)}sen(x)$
   (g) $y' = (y - 1)(x - 2)$
   (h) $y\sqrt{1 - x^2}y' = x$

(i) $(x-1)y' = xy$

(j) $(1-x^2)y' + 1 + y^2 = 0$

(k) $xy(1+x^2)y' = (1+y^2)$

(l) $y^2 + (y')^2 = 1$

(m) $y' = 2x\sqrt{1-y^2}$

3. *Equação linear de primeira ordem Verifique que a equação $y' + a(x)y = 0$ em que a é uma função integrável em um intervalo $[a,b] \subset \mathbf{R}$ é a variáveis separadas e escreva a fórmula de sua solução.*

4. *Resolva a equação diferencial $y' = -\frac{x}{y}$ e faça os gráficos de algumas curvas integrais.*

5. *Resolva as equações diferenciais seguintes e faça o gráfico de algumas integrais das mesmas.*

   (a) $y' = kx \equiv dy = kxdx \equiv y = k\frac{x^2}{2} + C.$

   (b) $y' = ky \equiv \frac{dy}{y} = kdx \equiv ln(y) = kx + C \equiv y = Ce^{kx}.$

   (c) $c'(t) = kc(t) \equiv \frac{dc(t)}{dt} = kc(t) \equiv \frac{dc}{c} = kdt \equiv ln(c) = kt + C \equiv c(t) = Ce^{kt}.$

   (d) $p'(t) = kp(t) \equiv \frac{dp(t)}{dt} = kp(t) \equiv \frac{dp}{p} = kdt \equiv ln(c) = kt + C \equiv p(t) = Ce^{kt}.$

6. *Mostre que a equação $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$ é a* variáveis separáveis *e pode ser escrita na forma $y'(x) + p(x)y(x) = 0$. Encontre uma fórmula para resolver tais equações*[13].

7. *Verifique se $y = sen(\omega x + b)$ é solução da equação diferencial $y'' - y = 0$. Calcule ω para que seja solução.*

8. *Encontre a curva que passa no ponto $(0,-2)$ de modo que inclinação da tangente à curva em qualquer ponto (x,y) seja a ordenada mais três.*

   o problema da pressão no cilindro.

9. *Um cilindro tem inicialmente o volume V_0 de um gás que é comprimido por um pistão de modo adiabático (sem ceder ou adquirir calor do meio ambiente) até atingir o volume V_1. Calcular o trabalho despendido na compressão. Sugestão use a equação de Poisson*

$$\frac{p}{p_0} = (\frac{V_0}{V})^k$$

   A constante k é especifica do gás. A equação de Poisson diz que pressão e volume são grandezas inversamente proporcionais.

[13] chamadas equações diferenciais lineares de primeira ordem homogêneas.

1.4 Equações para modelar

Modelagem significa usar uma equação para gerenciar um processo.
Claro, temos que descobrir a equação certa que sirva para descrever um determinado fenômeno. A modelagem começa com uma etapa experimental que produz dados os quais analisados estatisticamente permitem que se deduza dos mesmos uma descrição qualitativa do fenômeno. Como o nosso interesse, aqui, reside em *equações diferenciais*, o objetivo consiste em descobrir *taxas de variação* que expressam as derivadas (coeficientes angulares instantâneos), das distintas *variáveis* que constituam a nossa observação.
Kepler foi discípulo e sucessor de Tycho Brahe. Durante toda a sua vida, Tycho Brahe mediu a posição das estrelas e dos astros deixando a coleta de dados (estatística descritiva) para Kepler que descobriu as taxas de variação contidas nos dados e assim deduziu as equações (diferenciais) que regem o movimento dos planetas. Isto corresponde a mais de um século de pesquisas...

Esta dupla de processos,

- medição qualitativa dos fenômenos (estatística) e
- dedução de um modelo adequado (equações certas), a partir do levantamento estatístico

representam, em linhas gerais, a descrição do que é *modelagem matemática*. Como toda definição, esta é simples demais e somente no decorrer do processo é que você irá captar toda a concepção.

Também estamos usando um conceito mais amplo de equação, um *programa de computador é uma equação*, no sentido de que ele usa *variáveis* permitindo que o mesmo programa seja aplicado em diversos contextos. Não é por acaso que algumas linguagens de programação definem a menor *unidade*, as células dos programas, com o nome *função*, `um programa é um conjunto de funções sendo gerenciadas por uma` *`função principal`*.

Procuramos *funções* que resolvam as *equações diferenciais*. Nem sempre elas podem ser formuladas por um expressão "algébrica", mas é útil pensar que sim, que estamos procurando

$$f(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

de $n+1$ variáveis, em que $\underline{t}$ representa o "tempo" e $\underline{x_k}$ são variáveis "espaciais" e a *equação diferencial* expressa as taxas de variações de f relativamente a cada uma destas variáveis (ou agrupamento delas).

Resolver a *equação diferencial* significa encontrar f ou poder construí-la com um programa de computador.

No resto deste capítulo estudaremos exemplos de equações que modelam problemas, *estamos subindo nos ombros de gigantes*, vamos *assistir a construção*, em vez de reconstruir, como eles construíram, toda esta experiência.

Vamos departamentalizar o pensamento, este é um método que tem seus defeitos, mas é pedagógico na exposição. Cada seção a seguir tomará um tópico e depois, na síntese, veremos que eles se agrupam em classes e podem ser modelados por uma mesma equação.

1.4.1 Simulação geométrica

> Neste primeiro capítulo eu tenho como objetivo dar exemplos, mostrar que as equações diferenciais resolvem alguns problemas. Nesta seção vou tratar de exemplos geométricos. O aprofundamento desta questão seria uma disciplina chamada *geometria diferencial* que usa *equações diferenciais* para descrever objetos geométricos, mas é verdade que os geômetras não concordam muito com esta forma de descrever o trabalho deles.
> Uma expressão contendo duas variaveis, como $f(x, y) = 0$, é uma curva, porque, sob certas condições podemos *explicitar* uma das variáveis em relação à outra, quer dizer, podemos deixar uma variável *livre* e um outra *dependente*
> Por exemplo, podemos escrever
>
> $$y = g(x) \ \text{ ou } x = h(y).$$
>
> *Quando houver duas variáveis , se tem uma curva.* Isto pode ser generalizado e ser usada como uma regra prática, *havendo três variáveis, se tem uma superfície, . . . havendo n variáveis, se tem uma* variedade *de dimensão* $n-1$. É o *Teorema da Função implícita*[a] que justifica bem esta questão, e o conceito "*variedade*" nos liberta da prisão tridimensional em que a geometria nos confina criando uma linguagem para ser usada em qualquer dimensão.
>
> [a]Vou retornar ao Teorema da Função implícita no capítulo 2.

O meu objetivo aqui é representar curvas usando o conceito de *taxa de variação*, derivada, caindo numa equação diferencial. Quero saber *qual é a equação diferencial de uma família de curvas.* Vou partir de equações cartesianas, estudadas na Geometria Analítica e obter as respectivas equações diferenciais

O método consiste de apresentar exemplos, como se fossem exercícios resolvidos e você deve ler a descrição do exemplo e tentar fazer o desenvolvimento. Se tiver dificuldades, passe uma vista rápida na solução mas tente prosseguir sozinho depois do primeiro empurrão.

Exercícios 4 *Geometria e curvas*

1. *família de círculos Sabemos que*

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \tag{1.66}$$

é a equação cartesiana da família de todos os círculos do plano. Derive implicitamente para obter a equação diferencial diferencial desta família.

2. *trajetórias ortogonais Se duas curvas se encontrarem no ponto P de tal modo que seus coeficientes angulares sejam, em P, respectivamente m e $-\frac{1}{m}$, dizemos que elas são ortogonais. Encontre a família das curvas ortogonais à família dos círculos do plano.*

Solução 2

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(x-a)}{(y-b)} = m \tag{1.67}$$

$$-\frac{1}{m} = \frac{dy}{dx} = \frac{(y-b)}{(x-a)} \tag{1.68}$$

3. *Curvas tangentes Objetivo: Encontrar uma curva que seja tangente a outra curva dada.*
   (a) *Fórmula de Taylor Encontre a reta tangente ao gráfico de $y = x^2 + x - 6$ no ponto $(2, 0)$ e faça os gráficos.*
   (b) *Fórmula de Taylor Encontre a parábola tangente ao gráfico de $y = x^2 * cos(x) + sin(x) - 6$ no ponto $(0, -6)$ e faça os gráficos.*
   (c) *Fórmula de Taylor Construa uma função cujo gráfico seja semelhante ao de uma das curvas que aparece na figura (fig. 1.6) página 26, formada por dois segmentos de parábola tangentes no ponto $x = -3$. Faz parte da questão você descobrir qual é a curva possível.*

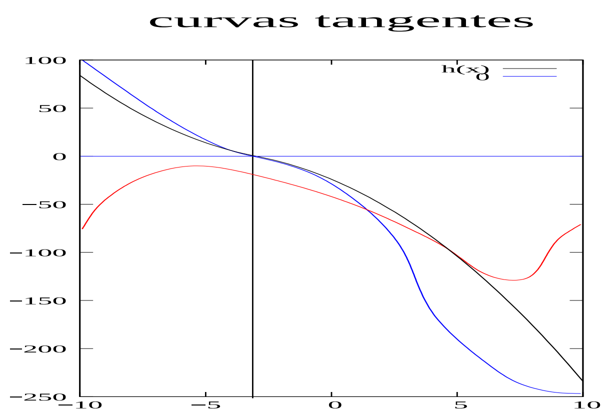


Figura 1.6: curvas tangentes

4. *Braquistocrona No século 16 diversos matemáticos, entre eles Galileu, estudaram o problema "qual é a curva sobre a qual um corpo desliza em*

tempo mínimo, sem frição e sujeito apenas à força de gravidade.". Vou repetir a bela introdução feita deste problema em [2, 25].

A figura (1.7) página 27, sugere uma curva, sendo a questão colocada nos

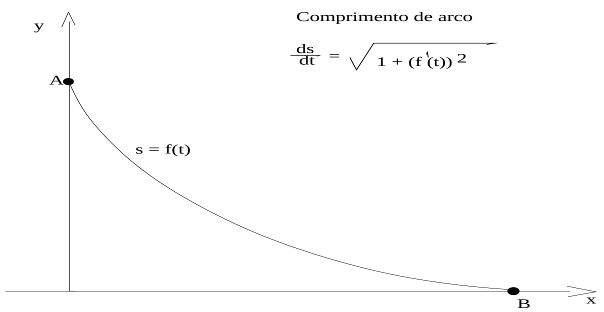


Figura 1.7: Uma curva plana, braquistocrona

seguintes termos: considere um ponto A ligado por um cabo a um ponto mais abaixo B e que uma capsula deslize pelo cabo de A para B sem atrito. Qual seria a melhor forma para a curva do cabo de modo que a queda se dê em tempo mínimo. *Galileu pensava que a curva ideal fosse um arco de círculo, mas foi em 1696 que Johann Bernouilli resolveu o problema usando o método que hoje conhecemos como* variacional, *"suponha as inúmeras possibilidades de curvas que liguem os pontos A,B, qual delas permitem que a capsula deslize em menor tempo?".*

Na verdade, este, como muitos outros problemas podem ter muitas soluções, e o método que vou apresentar, o método variacional, se aplica em muitas situações com bons resultados.

Antes de prosseguir, vou mostrar outras situações que levam para a mesma equação, no espirito deste capítulo, que é o de mostrar as diversas aplicações para as equações diferenciais.

Considere a seguinte situação: dois picos de montanha entre os quais se queira estabelecer conexão, no caso mais simples, em que eles estejam à mesma altura, e queiramos colocar um carro rolando em um cabo para fazer o transporte. *A figura (1.8) página 28, ilustra esta versão do problema.*

Observe que não é possível que o cabo fique na horizontal[14]*, ele tem um*

[14]Uma razão semelhante justifica porque a questão inicial não se coloca com um segmento de reta ligando os pontos A,B

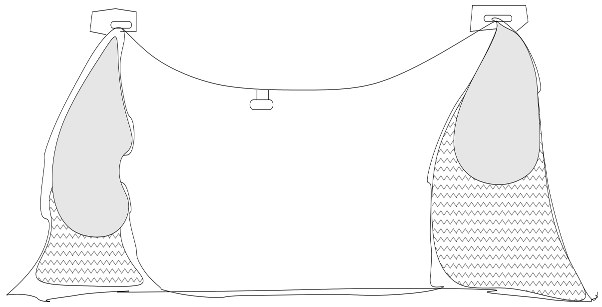


Figura 1.8: A curva completa entre dois pontos à mesma altura

peso e vai formar uma curva que não é um segmento de reta, ao peso do cabo temos que acrescentar o peso do carro e dos itens que o carro vai transportar, pessoas, por exemplo.

Quando o carro for solto de um extremo ele vai "pendular[15]*" e quase vai chegar ao outro ponto, dependendo da lubrificação do sistema, portanto é interessante encontrar "a melhor curva que otimize a energia, de modo que um pouco de energia anule o atrito e o carro chegue do outro lado onde será preso até que seja descarregado e carregado novamente para retornar.*

Este "novo" problema é um complemento ao anterior, se chamarmos de A,C os picos dos montes e B o ponto médio da curva descrita pelo cabo, temos o problema inicial, e obviamente basta descobrirmos a "semi-curva".

*Alguns autores generalizam o problema inutilmente, [**?**, brachistocrona], colocando-o como um problema tridimensional, quando ele é um problema plano, o caminho entre dois pontos está no plano determinado pelos dois pontos e projeção de um deles sobre o solo, (o principal objeto gravitacional envolvido...), interessa-nos uma curva plana. O menor caminho no espaço para um corpo percorrer será uma reta, depois uma curva plana não reta, se houver alguma restrição, e neste caso existe que é a presença da força gravitacional*[16]*, e finalmente* uma curva não plana sob restrições ainda maiores *(é o caso do caminho da luz no universo que não segue nem por uma reta e menos ainda sobre um plano), e este último não e o nosso caso.*

[15]Matemáticos do século 16 chegaram a pensar que esta curva seria um arco de círculo, por causa do pêndulo, outros pensaram numa parábola.
[16]Desta forma vemos os três "pontos" que determinam o plano, A,B, e o grande corpo gravitacional em jogo.

Também podemos garantir que esta curva é uma função $y = f(x)$ que vamos considerar diferenciável, então o comprimento de arco desta curva é dado ela equação (comprimento de arco)

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + f'(t)^2}dt \tag{1.69}$$

Por que interessa o "comprimento do arco", a resposta também mostra que este é um problema de "equações diferenciais".

Haverá tantas curvas (e cada uma com o seu comprimento de arco) quantas sejam as condições iniciais do problema[17]. *As condições iniciais são:*

(a) *a massa do sistema, se a massa fosse zero se teria um segmento de reta, para diferentes valores de massa se vai ter curvas diferentes.*

(b) *O coeficiente de elasticidade do cabo, além do que o sistema se quebra, o cabo se rompe ou se deforma.*

Na solução simplificada que vou apresentar, eu vou considerar a elasticidade do cabo um valor padrão, e não vou incluí-la nas contas.

Com isto podemos dizer que dado o peso do cabo (o que inclui o peso do trole *e a sua carga máxima especificada em cada um dos terminais de saída/chegada) temos uma família de curvas entre os valores:* trole *trafegando vazio, ou com carga máxima. A carga máxima permitida está conforme com a capacidade elástica do cabo.*

Se o peso fosse zero, teriamos um segmento de reta, portanto precisamos saber qual é o peso para resolver o problema. Porém o peso é função *do tamanho do cabo, porque a massa do cabo é diretamente proporcional ao tamanho do cabo (se obtém esta curva sem o peso do trole), a curva formada pelo cabo suspenso entre os dois extremos.*

$$dm(x) = k\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx \tag{1.70}$$

$$m(x) = k\int_0^x \sqrt{1 + (f'(t))^2}dt \tag{1.71}$$

$$f'(x)sin(\theta(x)) = 2gm(x) = 2kg\int_0^x \sqrt{1 + (f'(t))^2}dt \tag{1.72}$$

$$f''(x)sin(\theta(x)) + f'(x)cos(\theta(x))\theta'(x) = 2kg\sqrt{1 + (f'(x))^2} \tag{1.73}$$

$$\frac{ds}{dx}\frac{dx}{dt}sin(\theta(s)) = \tag{1.74}$$

A constante k na equação (70) é a constante de proporcionalidade da massa a ser multiplicado pelo comprimento do cabo, específica do do material e a espessura do cabo, por exemplo o seu diâmetro.

[17] As condições iniciais são um componente vital para solução de equações diferenciais, voltaremos a este assunt mais a frente.

O trole *cai em queda livre confira a figura (**??**) página* **??**

1.4.2 Colocando um foguete em órbita

A melhor posição para decolagem de um foguete é a *perpendicular relativamente ao solo* para otimizar os gastos de energia, e a melhor forma de fazê-lo entrar em órbita é *tangencialmente relativamente a órbita desejada*, devido ao aproveitamento integral da velocidade de chegada[18]. A figura (fig. 1.9) página 30, mostra uma trajetória falha que não irá colocar o satélite em órbita, enquanto que a figura (fig. 1.11) página 32, mostra como deve ser a trajetória para que o satélite entre em órbita. A equação diferencial que resolve este problema é uma equação vetorial, nós a discutiremos posteriormente.

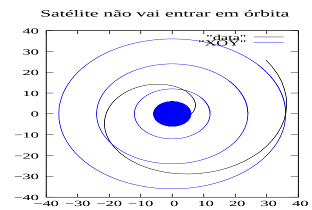


Figura 1.9: Trajetória falha de um satélite

Na figura (fig. 1.10) página 31, você pode ver o projeto de órbita da NASA[19] para levar novamente o homem à lua.

Suponha para efeitos deste problema que o raio terrestre seja 6 km, que o raio da esfera em que o satélite ficará em órbita tenha por raio 36 km. Obtenha uma curva plana satisfazendo as seguintes condições

- Considere três esferas S_0, S_1, S_2, S_3 de raios, respectivamente,

$$6km, 12km, 24kme36km.$$

- A curva do foguete que leva o satélite deve cortar as esferas com ângulos $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, 0$
- Os valores dos ângulos centrais em que as interseções acima ocorrem devem ser $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi$ o ponto de saída corresponde ao ângulo 0 com ângulo de incidência $\frac{\pi}{2}$. A figura mostra como deve ser a solução para que o foguete coloque o satélite em órbita

[18] eis a razão do interesse de certos grupos pela base brasileira de Alcântara...,a "linha" do equador se encontra na rota ótima para colocação satélites geo-estacionários, devido a rotação terrestre, e a ilha de Alcântara está praticamente em cima do "linha" do equador. . .

[19] National Aeronautics and Space Administration, www.nasa.gov

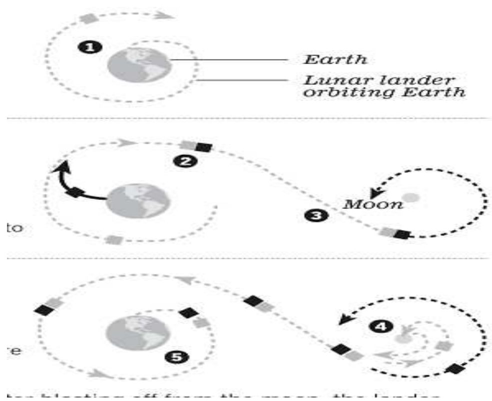


Figura 1.10: Trajetória Terra - Lua - NASA

A figura (fig. 1.9) mostra uma *solução errada* para o problema de colocar o foguete em órbita em que o passo da espiral é aritmético. A solução gráfica do problema se encontra na figura (fig. 1.11).

Observe que ao fazermos os cálculos para colocarmos o foguete em órbita, estamos falando de dois tipos de *tangente*:

- <u>tangente geométrica</u> A curva-trajetória do foguete conduzindo o satélite deve se interceptar tangencialmente com órbita definitiva do satélite. A tangente da trajetória do foguete deve ser a mesma tangente da órbita no ponto de acesso, o que corresponde à igualdade entre as derivadas da curva de velocidade e da órbita. Veja o gráfico (fig. 1.11) na página 32, mostrando a modelagem da solução do problema

- <u>tangente da velocidade.</u> Temos que impor a igualdade entre segundas derivadas da curva de velocidade e da órbita. A velocidade do foguete é tangencial a velocidade que deverá ter o satélite em órbita, igualdade das segundas derivadas. Isto vai garantir que o foguete chegue com a velocidade correta e fique em órbita. Se não houver esta segunda *tangência* o foguete chega na tangente geométrica e sai pela tangente... "caindo" na Terra ou se "perdendo" no espaço.

Portanto, se você se lembrar de *Polinômio de Taylor*, estamos procurando encontrar uma curva que se aproxime da trajetória circular com

- igualdade de valor no ponto,

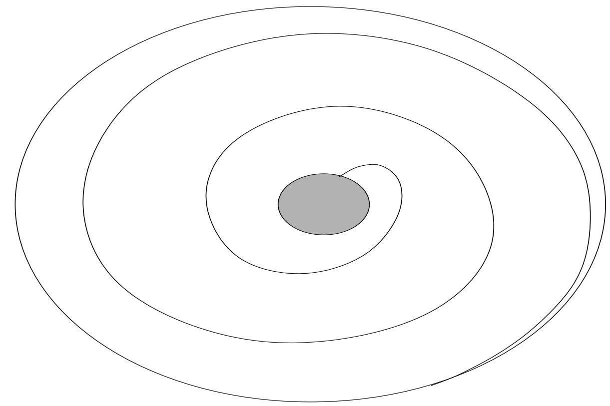


Figura 1.11: A trajetória que leva o foguete à órbita

- e da tangente no ponto,
- e da segunda derivada no ponto.

Em linguagem técnica, se $r(t)$ for a equação da trajetória do foguete e $o(t)$ for a equação da órbita esperada, deveremos ter:

$$\begin{aligned} r(t_1) &= o(t_1) \\ r'(t_1) &= o'(t_1) \\ r''(t_1) &= o''(t_1) \end{aligned}$$

em que t_1 é valor do tempo em que o foguete deve entrar em órbita.

Na linguagem de *equações diferenciais* estamos resolvendo um problema com *condições de fronteira* (eq. 1.75) página 32.

A construção da equação (eq. 1.75) representa a modelagem matemática do fenômeno. Quando soubermos resolver equações diferenciais de segunda ordem, terminaremos a solução deste problema.

1.5 Dois corpos e a gravitação

Vou definir a equação de dois corpos em movimento num plano. O problema que interessa aqui é a lei de *Newton da gravitação universal* aplicada a dois corpos ignorando a presença de outros corpos no Universo, desta forma um problema simplificado porque o problema geral, que foi discutido por Poincaré no fim século 19, apenas serviu para criar uma disciplina chamada *sistemas dinâmicos*, é o chamado *problema de n corpos* aos que se aplica a *lei da gravitação universal* que é um problema muito complexo.

Uma razão para discutir este problema é a possibilidade (remota) que um corpo celeste seja atraído para entrar no "campo gravitacional" da Terra. A figura (1.12) página 33, mostra algumas possibilidades do movimento relativo

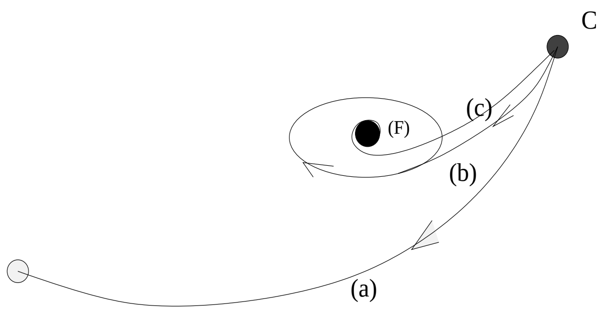


Figura 1.12: Gravitação, dois corpos

dos dois corpos com algumas reduções, uma delas é que um dos corpos não tenha movimento e que os dois corpos se movimentem num plano.

- Um corpo "fixo" (F);
- A posição remota de um corpo celeste em (C);
- As três possibilidades de caminhos do corpo celeste (C) ao se aproximar de (F), (a), (b) e (c);
  - Trajetória (a) o corpo passaria aproximadamente numa parábola tendo um ponto de minimo de aproximação com (F), *perigeu*, e seguiria neste parábola se afastando indefinidamente de (F).
  - Trajetória (b) o corpo entraria em órbita elíptica de (F) se tornando um satélite;
  - Trajetória (a) o corpo (C) entraria em colisão com (F).

Aqui podemos ver algumas coisas interessantes, a trajetória (a) e a trajetória (b) são duas cônicas, uma é uma transformação da outra: *podemos passar de uma elipse para uma parábola e vice-versa.*

Uma crítica desta simulação é ainda que os três casos têm uma grande quantidade de variação, por exemplo no caso (a) o corpo poderia dar pelo menos uma volta em torno da Terra antes de se afastar definitivamente. Também, no caso (b) poderiamos ter diversas elipses até que fosse encontrada uma *trajetória estável* ou uma passagem para o caso (c).

O caso (c) também tem variações, há diversos tipos de colisão, numa delas, e dependendo da quantidade de movimento e massa dos dois corpos, se poderia criar uma nuvem de corpos menores em gravitação de um maior.

Vou considerar apenas dois corpos, vou trabalhar com as duas simplificações já mencionadas e mais uma:

- de que os corpos celestes estão em movimento num plano,
- um dos corpos se encontra parado.
- a massa do corpo (C) é relativamente pequena comparada com a massa de (F) o que permite que façamos a simulação mantendo (F) fixo e (C) em movimento, com um pequeno erro.

Estas reduções são de menor importância para uma descrição preliminar do problema, e mesmo para resolução de problemas concretos é preciso fazer hipóteses deste tipo para que as equações não fiquem de tal forma complicadas que seja impossível de tratar a questão, por exemplo, considerar o movimento do corpo (F).

É o método comum nas simulações, primeiro encontramos uma saída simplificada e funcionando. Numa segunda etapa, testamos o modelo, comparamos com dados reais o que nos vai permitir a correção do modelo, ao incluir mais complexidade ao problema para nos aproximarmos da realidade. O processo é evidentemente iterativo, seguem-se novas etapas e novas correções no modelo até onde isto for possível ser feito.

Para obter as equações que preciso vou enunciar a lei da gravitação universal e em seguida adaptá-la a um sistema de coordenadas (localização da equação diferencial).

De [**?**], procurando com a palvra chave "gravitação universal" tiramos o texto seguinte. "A Gravitação universal é a força de atração que age entre todos os objetos por causa da sua massa, isto é, a quantidade de matéria de que são constituídos. A gravitação mantém o universo unido. Por exemplo, ela mantém juntos os gases quentes no sol e faz os planetas permanecerem em suas órbitas. A gravidade da Lua causa as marés oceânicas na terra. Por causa da gravitação, os objetos sobre a terra são atraídos em sua direção. A atração física que um planeta exerce sobre os objetos próximos é denominada força da gravidade. A lei da gravitação universal foi formulada pelo físico inglês Sir Isaac Newton em sua obra Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, publicada em 1687, que descreve a lei da gravitação universal e as Leis de Newton — as três leis dos corpos em movimento que assentaram-se como fundamento da mecânica clássica."

A história da *força de gravidade* é longa e passa por Aristóteles, e mais recentemente por Galileu, Tycho Brahae, Kepler e Newton. Novamente de [**?**], temos:

"Os antigos astrônomos gregos estudaram os movimentos dos planetas e da Lua. Entretanto, o paradigma aceito hoje foi determinado por Isaac Newton, físico e matemático inglês, baseado em estudos e descobertas feitas pelos físicos que até então trilhavam o caminho da gravitação. Como Newton mesmo disse, ele chegou a suas conclusões porque estava apoiado em ombros de gigantes."

A frase importante é sem dúvida a final, em que Newton confessa o que devemos ter sempre claro, é o trabalho em equipe que nos conduz ao conhecimento, e todo o trabalho feito desde Aristóteles, que não foi quem começou, até Newton, com inúmeros autores de tentativas fracassadas ou perdidas chegamos à formulação de autoria do físico inglês, Isaac Newton, de cima dos ombros de gigantes.

1.6 Equação diferencial

A força que atrai mutuamente dois corpos é descrita pela lei

$$F = \frac{M_1 m_2}{r^3}\vec{r}$$

em que M_1, m_2 são as respectivas massas de dois corpos e eu estou representando com letras maíuscula e minúscula para indicar que existe um corpo "maior"[20] e $\vec{r}$ é o vetor posição de um dos corpos relativamente ao outro considerado no centro do referêncial.

Agora preciso colocar esta equação dentro de uma determinada situação-problema cuja descrição preliminar é a seguinte, ver figura 1.12, página 33.

- Tenho dois corpos um dos quais vou considerar fixo, (F) na origem do sistema de eixos.
- Um corpo (C) tem uma velocidade v_0 expressa por um vetor tangente à curva que descreve o movimento do corpo, é a derivada desta curva.

Na figura (1.13) página 36, estão representadas, geometricamente, as condições iniciais do problema:

- o corpo (C) foi "fotografado" numa posição incial,

$$C = (c_1(t_0), c_2(t_0)) = \vec{r}(t_0)$$

- tem uma "velocidade inicial"[21]

$$c'(t_0) = (c_1'(t_0), c_2'(t_0)) = \dot{\vec{r}}(t_0)$$

[20]Não precisa ser maior, precisa ter mais massa, é o que acontece com os buracos negros, relativamente pequenos, mas com grande massa, atraem tudo que estiver próximo deles, inclusive "toda" a luz.

[21]Este não seria a denominação mais apropriada, *velocidade inicial*, mas estamos tirando um retrato de uma posição inicial, como se estivessemos considerando um corpo cuja posição e velocidade ameaça de colisão com a Terra.

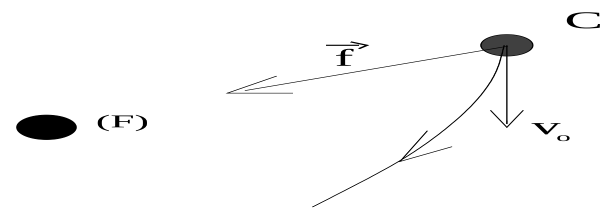


Figura 1.13: A força de atração gravitacional e a velocidade inicial

- e força de atração entre (C) e (F), $\vec{f}$

Vou traduzir estes dados em uma sucessão de equações usando a posição do corpo (F) como origem das coordenadas, e o eixo sobre o qual atua a gravidade, no momento t_0 como um dos eixos coordenados. Estas hipóteses facilitam a expressão da equação e não representam nenhum simplificação do problema.

$$r(t) = (r_1(t), r_2(t)); \tag{1.75}$$

$$C = (r_1(t_0), r_2(t_0)); \tag{1.76}$$

$$R_0 = \sqrt{r_1(t_0)^2 + r_2(t_0)^2} \tag{1.77}$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = (\dot{r}_1(t), \dot{r}_2(t)) \ ; \ \dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{v}_0 = (\dot{r}_1(t_0), \dot{r}_2(t_0)) \tag{1.78}$$

$$\vec{f_0} = \ddot{\vec{r}}(t_0) = (\ddot{r}_1(t_0), \ddot{r}_2(t_0) \tag{1.79}$$

$$\begin{cases} c_1''(t_0) & = 0 = \\ c_2''(t_0) & = \frac{M_1 m_1}{R_0^2} \end{cases} \tag{1.80}$$

$$\begin{cases} c_1'(t) & = v_{0,1} \\ c_2'(t) & = v_{0,2} + \frac{M_1 m_1}{R^2}(t - t_0) \end{cases} \tag{1.81}$$

$$\begin{cases} c_1(t) & = c_1(t_0) + v_{0,1}(t - t_0) \\ c_2'(t) & = c_2(t_0) + v_{0,2}(t - t_0) + \frac{M_1 m_1}{2R^2}(t - t_0)^2 \end{cases} \tag{1.82}$$

1.6.1 Equações vetoriais lineares

Vou mostrar como podemos nos adaptar a álgebra das equações diferenciais lineares para o caso vetorial. O objetivo imediato é descrever a linguagem necessária para as equações da gravitação universal.
Nesta seção estou usando o ponto como indicativo da derivada, como é habitual quando se deseja indicar que a variável é o tempo.
Também tenho um objetivo modesto, em termos de dimensão, vou tratar apenas vetores planos, com algum trabalho extra poderei, posteriormente, expandir a linguagem para uma dimensão qualquer.

Desejo expressar uma equação linear usando uma linguagem vetorial. Um exemplo simples do que isto representa é a equaçao de primeira ordem

$$\dot{\vec{r}}(t) = k\vec{r}(t) \tag{1.83}$$

Obtive este gráfico preliminar na figura (1.14) página 37, com os valores

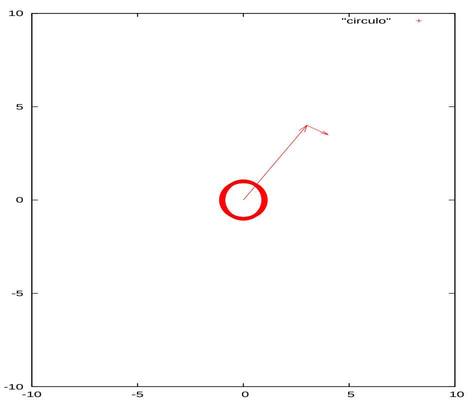


Figura 1.14: Foto do corpo (C)

- Coordenadas do corpo (C) $(3, 4)$
- Velocidade observada do corpo (C) $(1, -0.5)$

- Massa dos corpos (C) e (F), respectivamente $1, 10$
- Distância entre (C) e (F) 10

É muito pouco coisa, apenas mostra o corpo (C) no momento em que foi "fotografado", mas estamos começando. Vou trabalhar agora na modelagem da solução desta equação diferencial. O corpo (C) está superdimensionado no gráfico.

□

1.7 Generalização das leis de Kepler

A lei da gravitação universal, que relaciona a força entre dois corpos F e C de massas M e m, a uma distância $|\vec{r}|$, derivada por Newton é dada por:

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r} \tag{1.84}$$

Como vou fazer a derivação relativamente ao tempo vou usar a notação habitual da derivada relativamente ao tempo o ponto sobre a variável

$$\tfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \dot{\vec{r}}; \tag{1.85}$$
$$\tfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{a} = \ddot{\vec{r}} \tag{1.86}$$

1.7.1 Derivando as equações do movimento

Da lei da gravitação se pode derivar as leis de Kepler. Aplicando-se a lei da gravitação e a segunda lei do movimento temos

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} \tag{1.87}$$
$$m\ddot{\vec{r}}_m = -G\tfrac{Mm}{r^3}\vec{r} \tag{1.88}$$
$$M\ddot{\vec{r}}_M = G\tfrac{Mm}{r^3}\vec{r} \tag{1.89}$$
$$\ddot{\vec{r}} = -\tfrac{G(M+m)}{r^3}\vec{r} \tag{1.90}$$
$$\mu = G(m+M) \quad \Rightarrow \quad \ddot{\vec{r}} + \tfrac{\mu}{|r|^3}\vec{r} = 0 \equiv \ddot{\vec{r}} = -\tfrac{\mu}{|r|^3}\vec{r} \tag{1.91}$$

a equação (87) é a segunda lei de Newton e na equação (88) estou representando a força como a segunda derivada da posição do corpo com massa m, $\ddot{\vec{r}}_m$. Na equação (89) estou aplicando a mesma lógica relativamente ao corpo de massa M portanto, a equação do equilíbrio, equação (90) é a diferença entre as duas anteriores. Finalmente na equação (91) podemos escrever de forma mais simples a equação do equilíbrio de forças usando a substituição $\mu = G(m+M)$.

O resultado é a equação diferencial vetorial do movimento relativo de dois corpos. A solução desta equação nos dá a órbita relativa dos corpos (planeta, cometa, satélite, etc). A solução descreve como o vetor posição $\vec{r}$ varia com o tempo, mas sua solução não é simples.

Como é uma a equação diferencial vetorial de segunda ordem, isto é, envolve segunda derivada de vetores, precisamos de seis constantes para obter a solução, (na verdade duas constantes vetoriais, cada uma com três coordenadas).

Por exemplo, se eu souber a posição (tridimensional) e a velocidade de um planeta num deteminado momento, que vou chamar de *inicial*, poderei calcular sua posição e velocidade em qualquer momento (tempo) posterior.

Nesta solução vou demonstrar que a conservação da energia e do momentum angular são conseqüências das leis de Newton.

1.7.2 Conservação da Energia Total do Sistema

Tomando a equação do equilíbrio deduzida na seção anterior, podemos multiplicá-la escalarmente por $\dot{\vec{r}}$ porque, se a velocidade for perpendicular ao vetor posição a consequencia deste produto é anular a parte da aceleração na equaçao:

$$\ddot{\vec{r}} + \tfrac{\mu}{r^3}\vec{r} = 0 \tag{1.92}$$

$$< \dot{\vec{r}}, \left(\ddot{\vec{r}} + \tfrac{\mu}{r^3}\vec{r}\right) >=< \dot{\vec{r}}, 0 > \tag{1.93}$$

$$< \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}} > + < \dot{\vec{r}}, \tfrac{\mu}{r^3}\vec{r} >= 0 \tag{1.94}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}; \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} \tag{1.95}$$

$$< \vec{v}, \dot{\vec{v}} > + \tfrac{\mu}{r^3} < \vec{r}, \dot{\vec{r}} >= 0 \tag{1.96}$$

Se o corpo (C) se encontrar numa órbita circular em torno de (F)[22] na equação (94) tenho tudo zero, caso contrário haverá alguma coisa interessante para calcular (no caso de não estabilidade). Usando, ainda, a notação habitual para velocidade $\vec{v}$ e a derivada desta para a aceleração obtivemos na equação (96).

Agora chame o ângulo entre o vetor posição e o vetor velocidade de α e posso escrever

$$< \vec{v}, \dot{\vec{v}} >=< \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}} >= |v||\dot{v}|cos(\alpha) \tag{1.97}$$

$$\tfrac{d<v,v>}{dt} =< \tfrac{dv}{dt}, v > + < v, \tfrac{dv}{dt} >= 2 < v, \tfrac{dv}{dt} >= 2 < v, a > \tag{1.98}$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = -\tfrac{\mu}{|r|^3}\vec{r} \tag{1.99}$$

$$\tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{\mu}{r}\right) < \tfrac{r}{|r|}, \dot{\vec{r}} >= -\tfrac{\mu}{|r|^2} < \dot{\vec{r}}, \tfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|} >= -\tfrac{\mu<r,\dot{\vec{r}}>}{|r|^3} = -\tfrac{\mu<\dot{r},r>}{|r|^3} \tag{1.100}$$

A equação seguinte parece ser verdadeira (si non e vero, e bene trovato)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r}\right) = 0 \tag{1.101}$$

[22] Situação altamente improvável.

Eu não a escreveria exatamente assim, não tem sentido escrever $\frac{1}{r}$ porque r é o vetor posição, mas sim $\frac{1}{|r|}$. Também não sentido escrever v^2 e sim, talvez, como já escrevi antes $< v, v >$ porque v é um vetor. Aceitando esta forma de escrever o restante da expressão pode ser entendida, com a conclusão

$$\frac{1}{2}v2 - \frac{\mu}{r} = \epsilon = constante \tag{1.102}$$

$\square$

1.8 Conservação do momentum angular

Partindo da equação da conservação da energia os autores fazem os seguintes cálculos

$$\ddot{\vec{r}} + \tfrac{\mu}{|r|^3}\vec{r} = 0 \tag{1.103}$$

$$\vec{r} \ \text{x} \ \ddot{\vec{r}} + \tfrac{\mu}{r^3}\vec{r} \ \text{x} \ \vec{r} = 0 \tag{1.104}$$

$$\vec{p} \ \text{x} \ \vec{p} \equiv 0 \ \Rightarrow \ \vec{r} \ \text{x} \ \ddot{\vec{r}} = 0 \tag{1.105}$$

para concluir que $\vec{r} \ \text{x} \ \ddot{\vec{r}} \equiv 0$. Eu preferia tomar isto como hipótese porque a única força atuando sobre o corpo (C)[23] então os vetores $\vec{r}$, $\ddot{\vec{r}} = a$ são colineares[24] o que torna o produto vetorial nulo.

A derivada

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \ \text{x} \ \dot{\vec{r}}) = \dot{\vec{r}} \ \text{x} \ \dot{\vec{r}} + \vec{r} \ \text{x} \ \ddot{\vec{r}} = 0 \tag{1.106}$$

em parte devido a que $\vec{p} \ \text{x} \ \vec{p} = 0$ para qualquer vetor $\vec{p}$ e em parte porque a *aceleração* é colinear com o vetor posição.

Então definem os autores a constante (vetorial)

$$\vec{h} = (\vec{r} \ \text{x} \ \dot{\vec{r}}) = (\vec{r} \ \text{x} \ \dot{\vec{v}}) \tag{1.107}$$

momento angular.

$\square$

1.9 Lei das órbitas

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{|r|^3}\vec{r} = 0 \tag{1.108}$$

Multiplicando-se vetorialmente a equação 108 por $\vec{h}$ tem-se

[23] O corpo que estamos admitindo que está em movimento atraido por (F) que é fixo (nossa hipótese).

[24] Não havendo outra força sob consideração a aceleração da gravidade é a única, atual ao londo do vetor posição.

$$\ddot{\vec{r}} x \vec{h} = \tfrac{\mu}{|r|^3}(\vec{h} x \vec{r}) \tag{1.109}$$

$$\vec{p} \ \text{x} \ \vec{q} = -\vec{q} \ \text{x} \ \vec{p} \ \Rightarrow \ \tfrac{\mu}{|r|^3}(\vec{h} \ \text{x} \ \vec{r}) = \tfrac{\mu}{|r|^3}(\vec{r} \ \text{x} \ \vec{v}) \ \text{x} \ \vec{r} \tag{1.110}$$

$$(\vec{a} \ \text{x} \ \vec{b}) \ \text{x} \ \vec{c} = < \vec{a}, \vec{c} > \vec{b} - \vec{a} < \vec{b}, \vec{c} > \tag{1.111}$$

$$\tfrac{\mu}{|r|^3}(\vec{r} \ \text{x} \ \vec{v}) \ \text{x} \ \vec{r} = \tfrac{\mu}{|r|}\vec{v} - \tfrac{\mu}{|r|^3} < \vec{r}, \dot{\vec{r}} > \vec{r} \tag{1.112}$$

(é desnecessário a parte do meio na terceira equação depois da equação (4) da página ficando como está acima).

Esta equação é a derivada do quociente, como estou justificando em seguida

$$\mu \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{|r|}\right) = \frac{\mu}{|r|}\vec{v} - \frac{\mu}{|r|^3} < \vec{r}, \dot{\vec{r}} > \vec{r} \tag{1.113}$$

a única parte que precisa ser justificada é o segundo membro na soma, que é um produto escalar que vem da multiplicação do numerador $\vec{r}$ pela derivada do denominador $|r|$, $\dot{\vec{r}}$ pela regra da cadéia, e mais o fator $\vec{r}$ para colocar o resultado na direção do vetor $\vec{r}$ aumentando assim a potência no denominador.

Usando esta derivada, e substituindo na equação 111 se obtem a expressão

$$\frac{\mu}{|r|^3}(\vec{h} \ \text{x} \ \vec{r}) = \mu \frac{d}{dt}(\frac{\vec{r}}{|r|}) \tag{1.114}$$

1.9.1 Um corpo em queda livre

Uma dos fenômenos mais simples para modelar é o movimento de um corpo em queda livre. Aqui existe uma única força atuando sobre o corpo, a atração da gravidade, se desprezarmos a resistência do ar, que somente é significativa quando o corpo oferece uma superfície muito grande comparada com sua massa (baixa densidade), é o caso do *paraquedas* que veremos em seguida.

O que temos então é

$$y''(t) = -g \quad \Rightarrow$$
$$y'(t) = -gt + v_0 \text{ com velocidade inicial } v_0$$
$$y(t) = -\tfrac{gt^2}{2} + v_0 t + s_0$$

na última equação temos a influência de uma velocidade inicial e uma distância inicial s_0. Na primeira equação expressamos que a única força que se aplica ao corpo é atração terrestre g. Na segunda equação, no processo usual de integração do Cálculo, aparece uma constante que é a velocidade inicial. Na terceira equação, ainda como consequência do processo de integração surge uma nova constante que é a distância inicial em que se encontra objeto.

Como queremos *modelar* a queda livre vamos impor a *condição inicial*

$$v_0 = y'(t_0) = 0$$

e portanto a equação fica:

$$y(t) = -\frac{gt^2}{2} + s_0$$

em que uma nova condição de fronteira é indicada,

$$y(t_0) = s_0$$

o ponto de partida do movimento (queda). A maneira de apresentar esta modelagem, aquilo que se chama um *problema*, é:

$$y(t_0) = s_0 \text{ altura inicial} \tag{1.115}$$

$$y'(t_0) = 0 \text{ velocidade inicial zero} \tag{1.116}$$

$$y''(t) = -g \text{ a equação diferencial} \tag{1.117}$$

cuja solução é a equação anterior, a equação da trajetória do corpo em queda livre. As duas primeiras equações se chamam `condições iniciais` da `equação` diferencial que aparece na terceira equação. Em de se falar *condições iniciais*, no plural, se costuma dizer *condição de fronteira*.

1.9.2 A equação do Pêndulo

Os pêndulos já foram muito importantes numa época em que controlavam a velocidade dos relógios.

Sua importância como exemplo de conservação de energia é mais histórica já que a presença deles no dia a dia desapareceu, entretant existem diversos fenômenos que funcionam como pêndulos o torna importante estudarmos este caso. Observe que um satélite em órbita é um exemplo de pêndulo livre do atrito mas submetido à diversas forças de gravidade (Sol, Lua...).

O pêndulo é um exemplo de movimento oscilatório. Hoje restam apenas as redes, como exemplos de pêndulo, com grande importância no nosso dia-a-dia.

- *Movimento oscilatório* sujeito apenas à força da gravidade ele ficaria indefinidamente oscilando;

- *amortecido* a presença de forças como resistência do ar e atrito no ponto de apoio fazem com que, depois de algum tempo, a energia cinética inicialmente fornecida ao pêndulo seja consumida e o sistema entre em equilíbrio estático.

Vamos descrever este movimento com derivadas para, assim, montarmos o modelo, a *equação diferencial do pêndulo*.

O movimento do pêndulo se dá dentro uma trajetória muito especial, um arco de círculo cujas equações paramétricas são:

$$r(cos(\theta), sen(\theta)) \ ; \ \theta \in [-\alpha, \alpha]$$

em que $rsen(\alpha)$ é a altura com que o pêndulo foi solto (energia potencial). Sob a única força, atração da Terra, o pêndulo percorreria o mesmo caminho para sempre:

- energia potencial tendo-se lhe dado dado energia potencial ao levantá-lo a altura $rsen(\alpha)$ e ai solto, cairia ao longo do arco de círculo;
- energia cinética perdendo energia potencial e ganhando energia cinética até $\theta = 0$ quando a energia potencial se teria transformado toda em energia cinética conduzindo o pêndulo a subir ao longo do arco de círculo, perdendo energia cinética e ganhando energia potencial até que $\theta = \alpha$ quando a energia cinética seria nula e a potencial máxima;
- E o processo se repetiria no sentido inverso do caminho, indefinidamente, se não houvesse a resistência do ar nem o atrito com o ponto de suspensão.

Os fatos acima descritos são um exemplo de uma lei da Física, `Lei da Conservação da Energia`, e podem ser expressos como

energia cinética + energia potencial = Constante

Suponhamos, para simplificar o problema[25] que não haja atrito, nem com o ar e nem no suporte do pêndulo.

Isto nos conduz ao movimento em queda livre que já estudamos.

Obtivemos acima a equação do movimento de um corpo em queda livre:

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0$$

se o corpo partir do repouso então $v_0 = 0$ e temos

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + s_0$$

como a equação do movimento em função do tempo t. A derivada desta equação é a equação da velocidade:

$$y'(t) = v(t) = gt$$

isto é, a velocidade adquirida é proporcional a aceleração sendo o tempo a constante de proporcionalidade. Se eliminarmos t, sob hipótese de que $s_0 = 0$ teremos:

$$\begin{array}{c} t = \frac{v}{g} \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 = -\frac{v^2}{2g} \\ v^2 = 2gy(t) \\ \frac{1}{2}mv^2 = mgy \end{array}$$

[25] esta uma tática freqüente na solução de problemas, inicialmente admitimos hipóteses que simplificam a questão

Na última equação (e. 1.118, temos a expressão da Lei da Conservação da energia, à esquerda a *energia cinética* e à direita a *energia potencial*. A constante da Lei da Conservação da Energia é zero porque o pêndulo, atinge velocidade zero quando $\theta = \pm\alpha$.

Vamos adaptar os cálculos anteriores a equação do pêndulo que é um movimento vetorial:

$$y = a(cos(\theta), sen(\theta))$$

que ainda pode ser escrita por um sistema de equações:

$$\begin{array}{c} s = acos(\theta) - acos(\alpha) \\ y = a(cos(\theta) - acos(\alpha), sen(\theta) - asen(\alpha)) \\ v = \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{1}{2}(\frac{d\theta}{dt})^2 = gacos(\theta) - gacos(\alpha) \end{array}$$

na última linha a equação diferencial do pêndulo, uma *equação de primeira ordem e do segundo grau* que será resolvida mais a frente.

Voltaremos a discutir a equação de pêndulo para retirar as hipóteses simplificadoras.

1.9.3 Equações na química

Para completar a nossa visita às distintas áreas em que se podem aplicar as equações diferenciais para modelar os fenômenos, vamos apresentar mais dois exemplos, um da química e outro da biologia.

A química define como *reação de primeira ordem* a tendência de que moléculas de alguns compostos químicos ou átomos de alguns elementos têm de se decompor espontaneamente. Um dos exemplos mais comuns é o decaimento radiativo de alguns elementos químicos.

A velocidade de decomposição é diretamente proporcional à quantidade presente do referido material o que nos conduz a escrever

$$\frac{dy}{dt} = -ky \ ; \ k > 0$$

em que y representa a *quantidade presente* do material.

Como estamos supondo $k > 0$ como $y(t)$ representa a quantidade presente de material no instante t, é um número positivo, estamos dizendo, com esta equação que a derivada da função y é negativa. De fato estamos estudando o *decaimento radiativo* de uma substância.

Esta equação pode ser facilmente resolvida com os conceitos do Cálculo, mas seguindo o comportamento anterior, não vamos resolvê-la aqui, deixando apenas registrada *modelagem* do fenômeno.

Vamos apenas citar mais algumas situações em que a evolução depende da quantidade do "material" presente, o que leva à mesma modelagem acima, o próximo exemplo é da Biologia.

1.9.4 Equações na biologia

Uma população, de bactérias, ou de animais, se reproduz e cresce com dependência direta do número de indivíduos presentes. Se designamos por $y(t)$ a quantidade de indivíduos de uma população no instante t, depois um determinado período a função y deverá satisfazer a equação:

$$\frac{dy}{dt} = ky \; ; k > 0$$

Neste exemplo, em oposição ao estudo do *decaimento radiativo*, o *material* cresce, porque a derivada da função y é positiva.

A constante k, neste caso ou no caso do decaimento radiativo, serve para traduzir a velocidade do ciclo reprodutivo (ou a meia vida, como é chamada no caso do decaimento radiativo).

Observação 1 *Limite de validade de modelos*

Nas populações de animais estas equações podem ser bem mais complicadas, por exemplo, organismos internacionais que monitoram a vida no globo terrestre e que acompanham espécies em extinção, observaram o óbvio, um aparente desinteresse pela reprodução de uma determinada espécie *quando o nível $y(t)$ de membros da mesma cai abaixo de um determinado nível, forçando o aparecimento de modelos mais complicados.*

A frase que encontramos em textos sobre espécies em perigo *é precisamente esta "*desinteresse pela reprodução*", mas poderíamos observar que ficando rarefeita a espécie em questão, se reduz a probabilidade de encontro* macho-fêmea.

Isto mostra que a equação $y' = ky$ tem que ser corrigida quando o nível de indivíduos de uma espécie entra numa quantidade crítica. Esta quantidade crítica *é determinada por observações e é um coeficiente de cada espécie.*

Falamos de uma quantidade crítica *mínima, mas existe uma quantidade crítica máxima em que a espécie se ressente de alimento porque a população cresceu demais. Neste caso se observa um outro comportamento, a* antropofagia *se estabelece como um controle da população. Novamente a equação tem que ser adaptada para descrever a evolução da população neste novo nível.*

Os dois exemplos de quantidade máxima e mínima mostram que os modelos tem um limite de validade.

Exercícios 5 *Equações diferenciais de primeira ordem*

1. *Escreva uma equação diferencial que traduza a seguinte afirmação:* Os pontos (x, y) sobre uma curva α são tais que o coeficiente angular da tangente em qualquer ponto vale $-\frac{x}{y}$.
2. *Escreva uma equação diferencial que traduza a seguinte afirmação:* Em qualquer ponto de uma curva, a derivada é proporcional a abscissa.
3. *Escreva uma equação diferencial que traduza a seguinte afirmação:* Em qualquer ponto de uma curva, a derivada é proporcional a ordenada.

4. *A variação do capital é calculada com uma taxa que é proporcional ao capital. Escreva a equação diferencial que descreva isto.*
5. *O crescimento de uma população é proporcional ao tamanho da própria população. Escreva a equação diferencial correspondente.*
6. *Uma substância radiativa $y(t)$ se decompõe a uma velocidade que é proporcional à quantidade de substância presente no instante t. Descreva isto com uma equação diferencial.*
7. *Considere a expressão*
$$(ry')' + \frac{y}{x} = 0.$$
Encontre r sabendo que a função $y = x$ é uma solução da equação diferencial.
8. *A ordem de uma equação diferencial é* a ordem *da maior derivada envolvida em sua expressão. Calcule a ordem de cada uma das equações diferenciais estudadas nos itens anteriores.*
9. **Definição 3** *Problema. Chamamos* problema *a uma equação diferencial junto com as condições iniciais que permitem determinar uma única solução.*

   Resolva os seguintes problemas e indique a ordem das equações diferenciais envolvidas.

   (a) *y" + y = 0 ; y(0) = 1 ;*
   (b) *y' + y = 0 ; y(0) = 1 ;*
10. *Verifique se $y = sen(\omega x + b)$ é solução da equação diferencial $y'' + y = 0$. Calcule ω para que seja solução.*
11. *Faça o gráfico de todas as soluções das equações diferenciais dos itens anteriores.*

1.10 Solução de alguns exercícios

1.10.1 Classificando as equações

1. <u>(ex. 2a) página 12</u>

   Plano tangente no ponto $(1, 2, 15)$

   Escrevendo o diferencial da função f temos

$$dz = \tfrac{\partial f}{\partial x}dx + \tfrac{\partial f}{\partial y}dy \tag{1.118}$$
$$dz = (8x + 3y)dx + (3x + 3y^2)dy \tag{1.119}$$
$$\text{no ponto } (1, 2, 15) \Longrightarrow dz = 8dx + 15dy \tag{1.120}$$

$$(1,0) \mapsto u_1 = (1,0,8)\ ;\ (0,1) \mapsto u_2 = (0,1,15) \tag{1.121}$$
$$\frac{u_1}{||u_1||} = (\frac{1}{\sqrt{65}}, 0, \frac{8}{\sqrt{65}}) \tag{1.122}$$
$$\frac{u_2}{||u_2||} = (0, \frac{1}{sqrt226}, \frac{15}{sqrt226}) \tag{1.123}$$
$$z = \begin{bmatrix} i & j & k \\ u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{1}{\sqrt{65}} & 0 & \frac{8}{\sqrt{65}} \\ 0 & \frac{1}{sqrt226} & \frac{15}{sqrt226} \end{bmatrix} = \tag{1.124}$$
$$z = (u_{12}u_{23} - u_{22}u_{13}, u_{13}u_{21} - u_{11}u_{23}, u_{11}u_{22} - u_{21}u_{12}) \tag{1.125}$$
$$z \approx (-0.06600534, -0.12376001, 0.0082506678) \tag{1.126}$$
$$\frac{z}{||z||} = (-0.4697761, -0.8808303, 0.058722021) \tag{1.127}$$
$$z \mapsto z_n = (1 - 0.4697761, 2 - 0.8808303, 15.058722021) \tag{1.128}$$
$$z_n = (0.5302239, 1.1191697, 15.058722021) \tag{1.129}$$

Na equação (121) obtivemos as imagens dos vetores unitários básicos

$$(0,1), (1,0)$$

pela transformação diferencial que na prática é um plano paralelo ao plano tangente mas passando pela origem.

Nas equações (122) e (123) calculamos os correspondentes vetores unitários sobre o plano que passa na origem.

Na equação (124) usamos o determinante para calcular o produto vetorial dos dois vetores unitários calculados nas equações anteriores o que vai produzi um vetor ortogonal ao plano que passa na origem. Observe que estamos todo tempo trabalhando com o plano que passa na origem e que é paralelo ao plano tangente.

Na equação (127) calculamos um vetor unitário a partir do vetor ortogonal, logo um vetor normal ao plano que passa na origem, e na equação (128) calculamos a translação do vetor unitário para o ponto de tangência

$$(1, 2, 15).$$

Uma outra forma de resolver, e serve para testar os resultado que conseguimos acima, consiste em escrever diretamente a equação do plano tangente usando o diferencial:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \tag{1.130}$$
$$dz = (8x + 3y)dx + (3x + 3y^2)dy \tag{1.131}$$
$$z - 15 = 8(x-1) + 15(y-2) \tag{1.132}$$
$$-8(x-1) - 15(y-2) + (z-15) \tag{1.133}$$
$$U = (-8, -15, 1) \mapsto \frac{U}{||U||} = (-\frac{8}{17.029}, -\frac{15}{17.029}, \frac{1}{17.029} \tag{1.134}$$

$$u \approx (-0.46977617, -0.8808303, 0.05872202) \tag{1.135}$$
$$u \mapsto (-0.46977617, -0.8808303, 0.05872202) + (1,2,15) \tag{1.136}$$
$$u \mapsto (0.53022383, 1.1191697, 15.05872202) \tag{1.137}$$

Na equação (130) escrevemos o diferencial da função do qual deduzimos na equação (131) a expressão do diferencial para o ponto $(1, 2, 15)$.

Na equação (132) escrevemos a equação do plano tangente deduzida do diferencial encontrando assim um vetor ortogonal ao plano tangente na equação (134).

Na equação (135) calculamos um vetor unitário perpendicular ao plano tangente, mas na origem e na equação (136) calculamos a translação deste vetor para o ponto $(1, 2, 15)$. Os resultados coincidem pelos dois métodos.

1.10.2 Testando as equações

1. <u>(ex. 1) página 15</u>

Solução 3 *(a)*

$$x + 2y + 3ln|x + y - 2| = C \tag{1.138}$$
$$dx + 2dy + \frac{3}{x+y-2}dx + \frac{3}{x+y-2}dy = 0 \tag{1.139}$$
$$\frac{x+y+1}{x+y-2}dx\frac{2x+2y-1}{x+y-2}dy = 0 \qquad \frac{dy}{dx} = y' = -\frac{(x+y-2)(x+y+1)}{(2x+2y-1)(x+y-2)} \tag{1.140}$$

(b)

$$y = \frac{x+C}{ln(x)} \tag{1.141}$$
$$dy = \frac{ln(x) + \frac{x+C}{x}}{ln^2(x)}dx \tag{1.142}$$
$$dy = \frac{xln(x) + x + C}{xln^2(x)}dx \tag{1.143}$$
$$y' = \frac{xln(x) + x + C}{xln^2(x)} \tag{1.144}$$
$$xln^2(x)y' = xln(x) + x + C \tag{1.145}$$
$$xln^2(x)z = xln(x) + x + C\ ;\ z = y' \tag{1.146}$$
$$(ln^2(x) + 2ln(x))z + (xln^2(x))z' = (ln(x) + 1 + 1) \tag{1.147}$$
$$(ln^2(x) + 2ln(x))z + (xln^2(x))z' = (ln(x) + 2) \tag{1.148}$$
$$(ln^2(x) + 2ln(x))y' + (xln^2(x))y'' = (ln(x) + 2) \tag{1.149}$$
$$(xln^2(x))y'' + (ln^2(x) + 2ln(x))y' - ln(x) - 2 = 0 \tag{1.150}$$

(c)

$$2xy = 1 + K(x-1)^2 \tag{1.151}$$
$$2ydx + 2xdy = 2K(x-1)dx \tag{1.152}$$

$$2y + 2xy' = 2K(x-1) \tag{1.153}$$
$$\frac{2y+2xy'}{x-1} = 2K \tag{1.154}$$
$$\frac{(2y'+2y'+2xy'')(x-1)+2y+2xy'}{(x-1)^2} = 0 \tag{1.155}$$
$$\frac{(4y'+2xy'')(x-1)+2y+2xy'}{(x-1)^2} = 0 \tag{1.156}$$
$$\frac{2x}{x-1}y'' + \frac{4(x-1)+2x}{(x-1)^2}y' + \frac{2}{(x-1)^2}y = 0 \tag{1.157}$$

(d)

$$x^2 + y^2 + 2Cxy + K = 0 \tag{1.158}$$
$$2xdx + 2ydy + 2Cydx + 2Cxdy = 0 \tag{1.159}$$
$$(2x + 2Cy)dx + (2y + 2Cx)dy = 0 \tag{1.160}$$
$$y' = -\frac{x+Cy}{y+Cx} \tag{1.161}$$

(e)

$$x^2 + 2xy - y^2 + 8y = C \tag{1.162}$$
$$2xdx + 2ydx + 2xdy - 2ydy + 8dy = 0 \tag{1.163}$$
$$(2x + 2y)dx + (2x - 2y + 8)dy = 0 \tag{1.164}$$

(f)

$$x^3y + y^3x^2 = 5 \tag{1.165}$$
$$3x^2ydx + x^3dy + 2xy^3dx + 3y^2x^2dy = 0 \tag{1.166}$$
$$(3x^2y + 2xy^3)dx + (x^3 + 3y^2x^2)dy = 0 \tag{1.167}$$
$$(3x^2y + 2xy^3)dx = -(x^3 + 3y^2x^2)dy \tag{1.168}$$
$$\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{3x^2y+2xy^3}{x^3+3y^2x^2} \tag{1.169}$$

2. (ex. 2) página 15

Solução 4

$$1 + x^2y^2 = Cy \tag{1.170}$$
$$2xy^2dx + 2x^2ydy = Cdy \tag{1.171}$$
$$C = \frac{1+x^2y^2}{y} \quad \Rightarrow \quad 2xy^2dx + 2x^2ydy = \frac{1+x^2y^2}{y}dy \tag{1.172}$$
$$2xy^3dx + 2x^2y^2dy = (1 + x^2y^2)dy \tag{1.173}$$
$$2xy^3dx + (x^2y^2 - 1)dy = 0 \tag{1.174}$$

3. (ex. 7) página 16

Solução 5

$$(\frac{dy}{dx})^2 - 4y + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{4y-4}$$
$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{4y-4} = \pm 2\sqrt{y-1}$$
$$\frac{dy}{\sqrt{y-1}} == \pm 2dx$$

Se $y \neq 1$ temos

$$\sqrt{y-1} = x + c \equiv y = 1 + (x+c)^2$$

Se $y = 1$ a equação é satisfeita também o que nos dá uma solução ponto-crítico.

4. (ex. 8) página 16

Solução 6 *Como se trata de uma equação de segunda ordem teremos que substituir $z = y'$; $w = z' = y''$ portanto precisaremos de duas equações.*

$$\begin{cases} z & = y' \\ z' & = x(y')^3 = xz^3 \end{cases} \tag{1.175}$$
$$z' = xz^3 \equiv \frac{z'}{z^3} = \frac{dz}{z^3dx} = x \tag{1.176}$$
$$\frac{dz}{z^3} = xdx \tag{1.177}$$
$$\frac{z^{-2}}{-2} = -\frac{z^{-2}}{2} = \frac{x^2}{2} + C \tag{1.178}$$
$$\frac{z^{-2}}{-2} = -\frac{x^2}{2} + C_1 = C_1 - \frac{x^2}{2} \tag{1.179}$$
$$z = \frac{1}{C-\sqrt{x^2}} = \frac{dy}{dx}|x| < C_1 \in \mathbf{R}^{++} \tag{1.180}$$
$$y = \int \frac{1}{\sqrt{C_1-x^2}} + C_2 \ ; C_2 \in \mathbf{R} \tag{1.181}$$

Os gráficos são as curvas "amplificadas"de $x = sen(y - c_2)$

$$x = \pm c_1 sen(y - c_2) \ c_1, c_2 \in \mathbf{R} \ ; x \in \,]-c_1, c_1[$$

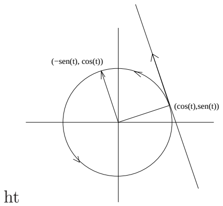
embora c_2 possa ser qualquer número real, os valores efetivos se encontram no intervalo $[0, 2\pi]$, o fator de amplificação é qualquer, e as curvas se encontram nas faixas com

$$x \in \,]-c_1, c_1[$$

5. (ex. 9) página 16

Solução 7 *É uma equação de terceira ordem, procuramos um sistema de três equações de primeira ordem para substituí-la:*

$$\begin{cases} z & = y' = \frac{dy}{dx} \\ w & = z' = \frac{d^2y}{dx^2} \\ \omega = w' & = \frac{d^3y}{dx^3} \\ 0 & = w' - y' \end{cases} \tag{1.182}$$
$$\begin{cases} z & = y' = \frac{dy}{dx} \\ w & = z' = \frac{d^2y}{dx^2} \\ 0 & = w' - y' \end{cases} \tag{1.183}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} \tag{1.184}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \\ w \end{pmatrix}' \tag{1.185}$$



ht

Figura 1.15: Sentido positivo no círculo

Com estas transformações obtivemos uma expressão da forma

$$\mathcal{A}Y = \mathcal{B}Y' \tag{1.186}$$

em que $Y = \begin{pmatrix} y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ *é um vetor (função vetorial). Esta equação matricial generaliza algumas equações que já resolvemos nesta lista de exercícios tendo, em lugar das matrizes, números. Deixamos esta questão em aberto neste momento, no último capítulo voltaremos a tratar de questões destes tipo quando veremos que é possível construir soluções para estas equações matriciais de forma similar à solução que já encontramos para as equações numéricas, apenas teremos que usar a Álgebra Linear para tratar com a álgebra das matrizes apropriadamente.*

6. <u>(ex. 10) página 16</u>

Solução 8 *Vamos representar o círculo com uma curva parametrizada:*

$$\vec{u(t)} = (x(t), y(t)) = (cos(t), sen(t))t \in [0, 2\pi) \tag{1.187}$$
$$\vec{u'(t)} = (x'(t), y'(t)) = (-sen(t), cos(t))t \in [0, 2\pi) \tag{1.188}$$
$$< \vec{u(t)}, \vec{u'(t)} >= -cos(t)sen(t) + sen(t)cos(t) = 0 \tag{1.189}$$
$$\vec{u(t)} \perp \vec{u'(t)} \tag{1.190}$$

O vetor $\vec{u'(t)}$ *é um vetor paralelo à reta tangente. O gráfico que corresponde a esta questão está na figura (fig. 1.15). Observe que a direção do vetor tangente indica o sentido* natural *de circulação sobre a curva, mostrando-nos qual é o sentido positivo sobre o círculo trigonométrico, o sentido anti-horário. O vetor posição é* $\vec{r} = (x, y)$ *cujo coeficiente angular é* $\frac{y}{x}$*. O coeficiente angular da reta perpendicular a este vetor é* $m = -\frac{x}{y}$ *que é o valor da derivada da curva*[26]*, logo,*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

é a equação diferencial procurada.

7. <u>(ex. 11) página 16</u>

[26] o coeficiente angular da reta tangente é o valor da derivada

Solução 9 *Derivando implicitamente* $xy = log(y) + c$ *temos*

$$ydx + xdy = \frac{dy}{y} + 0 \equiv ydx = -xdy + \frac{dy}{y} \equiv$$
$$ydx = \frac{(1-xy)dy}{y} \equiv 1 = \frac{(1-xy)dy}{y^2dx} \equiv \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1-xy}$$

1.10.3 Variáveis separáveis

1. <u>(ex. 1) página 21</u>

Solução 10

$$(1 + x^2)y' + 2xy = 0 \tag{1.191}$$
$$(1 + x^2)y' = -2xy \tag{1.192}$$
$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2} = -\frac{y'}{y} = -\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} \tag{1.193}$$
$$f(x)dx = \frac{2x}{1+x^2}dx = -\frac{dy}{y} = g(y)dy \tag{1.194}$$
$$F(x) = \int_a^x \frac{2t}{1+t^2}dt = -\int_\alpha^y \frac{dt}{t} = G(y) = -ln(y) + ln(\alpha) \tag{1.195}$$
$$F(x) = ln(1 + x^2) - ln(1 + a^2) = G(y) = -ln(y) + ln(\alpha) \tag{1.196}$$
$$ln(1 + x^2) = -ln(y) + ln(1 + a^2) + ln(\alpha) \tag{1.197}$$
$$ln(1 + x^2) = -ln(y) + ln(\alpha(1 + a^2)) \tag{1.198}$$
$$ln(1 + x^2) = ln(\frac{\alpha(1+a^2)}{y}) \tag{1.199}$$
$$1 + x^2 = \frac{\alpha(1+a^2)}{y} \tag{1.200}$$
$$y = \frac{\alpha(1+a^2)}{1+x^2} \tag{1.201}$$

Verificando a solução:

$$y' = -\frac{2x\alpha(1+a^2)}{(1+x^2)^2} \tag{1.202}$$
$$(1 + x^2)y' = -\frac{2x\alpha(1+a^2)}{1+x^2} = -2xy \tag{1.203}$$
$$(1 + x^2)y' = -2xy \tag{1.204}$$

2. <u>(ex. **??**) página 22</u>

(a) **Solução 11**

$$(x + 1)y' + y^2 = 0 \equiv (x + 1)\frac{dy}{dx} = -y^2 \tag{1.205}$$
$$-\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{(x+1)} \tag{1.206}$$
$$\frac{dy}{y} = ln(x + 1) + C = ln(C(x + 1)) \tag{1.207}$$
$$y = \frac{1}{ln(C(x+1))} \tag{1.208}$$

(b) **Solução 12**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{y^2} \tag{1.209}$$
$$y^2dy = x^3dx \equiv \frac{y^3}{3} = \frac{x^4}{4} + C \tag{1.210}$$
$$\frac{y^3}{3} - \frac{x^4}{4} = C \tag{1.211}$$

Como C é a diferença de números reais quaisquer pode ser qualquer número real. Como esta equação pode ser facilmente explicitada, as soluções podem ser escritas

$$y = \sqrt[3]{C - \frac{x^4}{4}} \;; C \in \mathbf{R}$$

(c) **Solução 13**

$$\frac{-y'tan(y)}{cos(y)} = \frac{1}{tan(x)} \tag{1.212}$$
$$\frac{-y'sen(y)}{cos^2(y)} = \frac{sen(x)}{cos(x)} \tag{1.213}$$
$$\frac{-sen(y)dy}{cos^2(y)dx} = \frac{sen(x)}{cos(x)} \tag{1.214}$$
$$\frac{-sen(y)dy}{cos^2(y)} = -\frac{-sen(x)dx}{cos(x)} \tag{1.215}$$
$$\frac{dz}{z^2} = -\frac{dt}{t} \;;\; z = cos(y) \;; t = cos(x) \tag{1.216}$$
$$-\frac{1}{z} = -log(t) + C \tag{1.217}$$
$$-\frac{1}{cos(y)} = -log(cos(x)) + C \tag{1.218}$$
$$y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \;;\; x \in (-\frac{pi}{2}, \frac{pi}{2}) + k\pi \tag{1.219}$$
$$(x, y) \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi) \;\text{ x }\; (-\frac{pi}{2} + k\pi, \frac{pi}{2} + k\pi) = \Omega \tag{1.220}$$

(d) Resposta.

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x^2 - 4} \tag{1.221}$$

(e) Resposta.

$$xyy' = 1 + x^2 + y2 + x^2y^2 = (1 + x^2)(1 + y^2) \tag{1.222}$$
$$\frac{ydy}{1+y^2} = \frac{(1+x^2)dx}{x} \tag{1.223}$$

(f) Resposta.

$$\frac{ydy}{e^{2y}} = e^x sen(x)dx \tag{1.224}$$

(g) Resposta.

$$ln(y - 1) = \frac{x^2}{2} - 2x + C \tag{1.225}$$

(h) Resposta.

$$y^2 = 2\sqrt{1 - x^2} + C \tag{1.226}$$

(i) Resposta.

$$ln(y) = x + ln(x - 1) + C \tag{1.227}$$

(j) **Solução 14**

$$-\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1-x^2} = (\frac{1}{2(1-x)} - \frac{1}{2(1+x)})dx \tag{1.228}$$
$$Atan(y) = ln(sqrt1 - x^2) + C \tag{1.229}$$

(k) **Solução 15**

$$\frac{ydy}{(1+y^2)} = \frac{dx}{x(1+x^2))}) \tag{1.230}$$
$$\frac{1}{2}ln(1 + y^2) = ln(x) + \frac{1}{2}ln(\frac{x-1}{x+i}) + C \tag{1.231}$$

(l) **Solução 16**

$$y' = \sqrt{1 - y^2} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = dx \tag{1.232}$$

(m) **Solução 17**

$$\frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = 2xdx \Rightarrow Asen(y) = x^2 + C \tag{1.233}$$

3. (ex. 1.5) página 22 Equação linear de primeira ordem

Solução 18

$$\frac{dy}{y} = -a(x)dx \Rightarrow ln(y) = -A(x) + C \tag{1.234}$$
$$y = Kexp(-A(x)) \tag{1.235}$$

em que A é uma primitiva qualquer da função a

4. (ex. **??**) página **??**

Solução 19

$$y' = -\frac{x}{y} \equiv yy' = -x \equiv ydy = -xdx \equiv \tag{1.236}$$
$$\equiv \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \equiv \tag{1.237}$$
$$\equiv y^2 + x^2 = C \tag{1.238}$$

Se C for positivo as curvas-solução são as famílias de círculos concêntricos, com centro no ponto $(0, 0)$.

5. (ex. **??**) página **??**

   (a) $y' = kx \equiv dy = kxdx \equiv y = k\frac{x^2}{2} + C$.

   (b) $y' = ky \equiv \frac{dy}{y} = kdx \equiv ln(y) = kx + C \equiv y = Ce^{kx}$.

   (c) $c'(t) = kc(t) \equiv \frac{dc(t)}{dt} = kc(t) \equiv \frac{dc}{c} = kdt \equiv ln(c) = kt + C \equiv c(t) = Ce^{kt}$.

   (d) $p'(t) = kp(t) \equiv \frac{dp(t)}{dt} = kp(t) \equiv \frac{dp}{p} = kdt \equiv ln(c) = kt + C \equiv p(t) = Ce^{kt}$.

6. (ex. **??**) página **??**

Solução 20 *Se $a(x) \neq 0$ podemos dividir a equação toda por $a(x)$ para colocá-la na forma padrão de equações diferenciais lineares de primeira ordem: $y' + p(x)y = q(x)$. Neste caso $q(x) = 0$ e a equação se denomina* homogênea. *As equações homogêneas são* a variáveis separá veis *e a solução se obtém segundo a fórmula*

$$h(y)dy = g(x)dx$$

integrada termo a termo:

$$\frac{y'}{y} = -p(x) \quad \Rightarrow \quad ln(y) = -P(x)$$

em que $P(x)$ é uma primitiva de $p(x)$. Esta expressão pode ser escrita na forma mais conveniente:

$$y = e^{-\int_a^x p(t)dt} = Ce^{-\int p(t)dt}.$$

7. (ex. **??**) página **??**

Solução 21 *Derivando duas vezes $y = sen(\omega x + b)$ temos:*

$$y' = \omega cos(\omega x + b)\ ;\ y'' = -\omega^2 sen(\omega x + b)$$

Como queremos que $y'' = y$ o valor de $\omega = \pm i$. Então, de fato, $y = sen(\omega x + b)$ é solução da equação diferencial com $\omega = \pm i$.

8. (ex. **??**) página **??**

Solução 22 *Neste caso a substância radiativa decai, quer dizer que sua derivada é negativa e proporcional a substância presente: $y' = -ky$, em que k é uma constante positiva assim como também y representa uma quantidade positiva. A solução: $y(t) = Ce^{-kt}$, em que C representa a quantidade presente de substância inicialmente medida.*

9. Mostre que a equação $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$ é *a variáveis separáveis* e pode ser escrita na forma $y'(x) + p(x)y(x) = 0$. Encontre uma fórmula para resolver tais equações[27].

Solução 23 *Se $a(x) \neq 0$ podemos dividir a equação toda por $a(x)$ para colocá-la na forma padrão de equações diferenciais lineares de primeira ordem: $y' + p(x)y = q(x)$. Neste caso $q(x) = 0$ e a equação se denomina* homogênea. *As equações homogêneas são* a variáveis separáveis *e a solução se obtém segundo a fórmula*

$$h(y)dy = g(x)dx$$

integrada termo a termo:

$$\frac{y'}{y} = -p(x) \quad \Rightarrow \quad ln(y) = -P(x)$$

em que $P(x)$ é uma primitiva de $p(x)$. Esta expressão pode ser escrita na forma mais conveniente:

$$y = e^{-\int_a^x p(t)dt} = Ce^{-\int p(t)dt}.$$

10. Verifique se $y = sen(\omega x + b)$ é solução da equação diferencial $y'' - y = 0$. Calcule ω para que seja solução.

Solução 24 *Derivando duas vezes $y = sen(\omega x + b)$ temos:*

$$y' = \omega cos(\omega x + b)\ ;\ y'' = -\omega^2 sen(\omega x + b)$$

Como queremos que $y'' = y$ o valor de $\omega = \pm i$. Então, de fato, $y = sen(\omega x + b)$ é solução da equação diferencial com $\omega = \pm i$.

[27] chamadas equações diferenciais lineares de primeira ordem homogêneas.

Capítulo 2

Equações Diferenciais Exatas

Neste capítulo vamos resolver um tipo de equação chamada *exata*. Frequentemente, a denominação dos *métodos*, nesta disciplina, tem distorções de uma longa história. O nome é acertado, mas é um pouco difícil de explicá-lo.
A palavra chave aqui é *derivação implícita* e naturalmente o *Teorema da Função Implícita* estará no centro da questão.
Ao *derivar implicitamente* uma expressão como $z = F(x, y)$ somos conduzidos a uma *expressão diferencial exata*[a]

$$dz = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$$

que *naturalmente* nos vai conduzir à equação de um *objeto linear* tangente ao gráfico, $graf(F)$ de F.
Esta *expressão diferencial* é um *diferencial exato*. O caminho inverso é a solução de uma *equação diferencial exata*.

[a]eis a razão do nome do método

2.1 A derivação implícita

As equações diferenciais exatas tem o formato simplificado

$$dw = 0 \tag{2.1}$$

O zero é essencial porque a solução desta equação é uma "primitiva" w cujo diferencial esta expresso na equação.
As razões do nome "exatas" são as seguintes:

- A equação *pode não ser exata*, então teremos que fazer-lhe uma alteração para obtermos uma *equação exata* que lhe seja equivalente. Esta será uma das seções do texto, mais a frente. Isto pode não ser possível e neste caso provamos que a equação não é exata e que não pode ser resolvida. Esta, é em geral, a parte mais fácil do problema.
- A equação pode ser exata, quer dizer, existe, claramente, uma função

$$w = F(z_1, \dots, z_n) \ ; \ dw = dF \tag{2.2}$$

e resolver a equação consiste em descobrir F por "n integrações parciais" para escrever

$$F(z_1, \dots, z_n) = C \tag{2.3}$$

em que C é uma constante e portanto a solução é uma variedade de nível da função primitiva encontrada.

Afirmei que existe "claramente" uma função cuja diferencial exata esta expressa na equação (2). Vou mostrar-lhe, mais a frente, que podemos validar a "exatidão" da diferencial sem que seja possível encontrar uma primitiva. Você vai ver que não há nenhuma contradição nesta afirmação, ou seja podemos ter equações diferenciais exatas que não tem uma solução (ou que não conseguimos calcular a solução).
Falei da existência clara de uma função cuja diferencial exata se encontra expresso pela equação, podemos mostrar que isto é verdade sem ter meios de descobrir esta função. Neste caso, que é o mais comum, nem tudo está perdido porque é possível encontrar-se uma solução aproximada para equação.
Falando ainda de outra maneira, podemos *provar* que a equação é do *tipo* `exata` mas não saber resolvê-la. Nestes casos podemos encontrar soluções aproximadas.
Aqui estou apresentando a situação com sua generalidade mais ampla e isto pode assustar quem leia o texto. Como não é este objetivo, vou apresentar uma formulação mais simples, entretanto é necessário se habituar com a formulação genérica.

2.1.1 Curva de nível - solução de uma equação exata

Curva de nível, ou uma formulação geométrica para o problema.
Considere uma função diferenciável

$$z = F(x, y); (x, y) \in \Omega \subset \mathbf{R}^2 \tag{2.4}$$

da qual eu posso deduzir a expressão diferencial exata

$$dz = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy \tag{2.5}$$

A expressão da qual eu parti agora,

$$z = F(x, y) \tag{2.6}$$

é uma superfície de um tipo especial, é o gráfico de uma função diferenciável. Nesta dimensão em que nos encontramos, temos uma linguagem geométrica, superfícies, planos, que são variedades de dimensão dois para as quais temos nomes geométricos.

Posso cortar esta superfície com um plano (de altura) constante

$$z = C \tag{2.7}$$

o que significa na prática que resolvi o sistema de equações

$$\begin{cases} z = C \\ z = F(x, y) \end{cases} \tag{2.8}$$

Geometricamente falando o resultado desta interseção é uma curva no espaço, obtida pela interseção de duas superfícies. Como o plano que usei para cortar a superfície, é paralelo ao plano

$$XOY \tag{2.9}$$

então há uma projeção desta curva espacial sobre o domínio Ω de

$$z = F(x, y)$$

chamado *curva de nível*.

Repetindo, a curva de nível é uma curva que se encontra no domínio da função F.

Observe que posso representar a interseção escrevendo

$$F(x, y) = C \tag{2.10}$$

Agora vou diferenciar esta última equação escrevendo

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0 \tag{2.11}$$

Esta última expressão é a que, em geral, temos, a equação diferencial exata. Quer dizer, resolver uma equação diferencial exata consiste em recuperar, se for possível, a função cuja diferencial "exatas" se encontra expresso na equação.

Mas não é nesta forma, como na equação (11), que escrevemos as equações diferenciais exatas, até mesmo porque ela podem não ser "exatas" e portanto não existir a função

$$z = F(x, y) \tag{2.12}$$

Os textos apresentam esta equação como

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \tag{2.13}$$

e se ela for "exata"então existe uma função

$$w = F(x, y) \tag{2.14}$$

tal que

$$\begin{array}{c} P(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} \\ Q(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y} \end{array} \tag{2.15}$$

Aqui você pode ver as "integrações parciais" a que me referi acima, resolver a equação diferencial exata, no formato mais geral como comecei a apresentação,

$$z = F(z_1, \dots, z_n) \; ; \; dw = dF \tag{2.16}$$

consiste em descobrir F por "n integrações parciais" para escrever

$$F(z_1, \dots, z_n) = C \tag{2.17}$$

em que C é uma constante e portanto a solução é uma variedade de nível da função primitiva encontrada.

Na formulação geométrica a solução é uma curva de nível, uma variedade de dimensão um.

Finalmente, para terminar esta introdução, observe os dois métodos:

- derivar implicitamente uma função (diferenciável) conduz à expressão da *equação diferencial exata*;
- resolver uma *equação diferencial exata* conduz a uma variedade de nível explicita alguma das variáveis $z_1, \dots, z_n$ em função das outras, por exemplo

$$F(z_1, \dots, z_n) = C \tag{2.18}$$
$$z_n = f(z_1, \dots, z_{n-1}) \tag{2.19}$$

  em que explicitei z_n em função de $z_1, \dots, z_{n-1}$, mas poderia igualmente ter explicitado qualquer outra das variáveis, em função das outras.

Este comentário mostra a importância de um teorema que se encontra à base da solução das equações diferenciais exatas: o *teorema da função implícita*.

A lista de exercícios seguinte é um laboratório sobre derivação implícita devendo conduzi-lo ao enunciado do Teorema da Função Implícita. Vamos trabalhar com expressões diferenciais das quais se pode deduzir a equação de objetos tangentes ao gráfico de uma função.

Exercícios 6 *Derivação implícita*

1. *Qual é a dimensão do objeto $z = F(x, y) = x^2 + y^2$?*

2. <u>Jacobiana - derivada - derivadas parciais</u> *Considere*

$$\Omega \subset \mathbf{R}^2 \xrightarrow{F} \mathbf{R} \; ; (x,y) \mapsto z = x^2 + y^2$$

Derive implicitamente $z = F(x,y)$ *para obter a* diferencial exata dz *também chamada* diferencial total. *Considerando o vetor* $\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$ *escreva a di*ferencial exata *obtida como um produto*[1] *de matrizes.*

3. *Observe que* $(3, 4, F(3, 4))$ *é um ponto do gráfico* $graf(F)$. *Derive implicitamente* $z = F(x,y)$ *e faça as substituições*

$$x \to 3; y \to 4; z \to 25 \tag{2.20}$$
$$dx \to x - 3; dy \to y - 4; dz \to z - 25 \tag{2.21}$$

para encontrar a equação do plano tangente ao gráfico de F *no ponto* $(3, 4, 25)$. *Justifique por que o resultado é a equação do plano tangente.*

4. <u>curva de nível</u> *Qual é a dimensão do objeto* $25 = F(x,y) = x^2 + y^2$ *?*

5. <u>curva de nível e reta tangente</u> *Derive implicitamente*

$$z = F(x,y) = x^2 + y^2 = 25$$

e faça as substituições

$$x \to 3; y \to 4 \tag{2.22}$$
$$dx \to x - 3; dy \to y - 4 \tag{2.23}$$

para encontrar a equação da reta tangente ao gráfico da curva de nível $F(x,y) = 25$ *no ponto* $(3, 4)$. *Represente graficamente a curva* $F(x,y) = 25$ *e a reta tangente.*

6. *Explicite* y *em* $z = F(x,y) = x^2 + y^2 = 25$ *;* $y = g(x)$, *indicando um intervalo* $x \in [\alpha, \beta]$ *em que isto seja possível. Calcule* $g'(x)$ *e deduza qual é relação entre*

$$g'(x), \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$$

7. <u>derivação implícita e plano tangente</u>

Considere a função

$$\Omega \subset \mathbf{R}^2 \xrightarrow{F} \mathbf{R} \; ; (x,y) \mapsto z = F(x.y)$$

continuamente diferenciável nas duas variáveis. Suponha que que a solução $(a, b, c) \; ; c = F(a, b)$ *seja conhecida.*

[1] a matriz formada pela derivadas parciais, é a derivada de F

Derive implicitamente a expressão $z = F(x,y)$ *e encontre a equação do plano tangente ao* $graf(F)$ *no ponto* $(a, b, c = F(a, b))$, *substituindo*

$$x \to a; y \to B; z \to c; \tag{2.24}$$
$$dx \to x - a; dy \to y - b; dz \to z - c \tag{2.25}$$
$$\tag{2.26}$$

Justifique porque a diferencial exata *encontrada conduz à equação do plano tangente.*

8. <u>derivação implícita e curva de nível</u>

Considere a função

$$\Omega \subset \mathbf{R}^2 \xrightarrow{F} \mathbf{R} \; ; (x,y) \mapsto z = F(x.y)$$

continuamente diferenciável nas duas variáveis. Suponha que que a solução $(a, b, c) \; ; c = F(a, b)$ *seja conhecida.*

Derive implicitamente a expressão $F(x,y) = c$ *e depois substituindo*

$$x \to a; y \to B; z \to c; \tag{2.27}$$
$$dx \to x - a; dy \to y - b; dz \to 0 \tag{2.28}$$
$$\tag{2.29}$$

justifique porque a diferencial exata *encontrada conduz à equação da reta tangente à curva de nível*[2] $F(x,y) = c$ *no ponto* (a, b).

9. *Suponha que seja possível explicitar, em* $F(x,y) = c$, *a expressão de* $y = g(x)$ *numa vizinhança de* $x = a$. *Verifique que a reta obtida no item anterior é tangente ao gráfico* $graf(g)$ *no ponto* $(a, g(a)) \; ; g(a) = b$ *e calcule a expressão de* $g'(a)$ *em termos de*

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \tag{2.30}$$

10. <u>Dissertação</u> *Considerando que* tangência *é uma espécie de equivalência, justifique* $graf(F)$ *é uma superfície e* $graf(F(x,y) = c)$ *é uma curva.*

11. <u>derivação implícita e curva de nível</u> *Considere a função*

$$\Omega \subset \mathbf{R}^2 \xrightarrow{F} \mathbf{R} \; ; F(x,y) = z = x^2 - y^2$$

Encontre uma solução inteira $(a, b) \; ; 7 = F(a, b)$.

[2] Observe que as curvas de nível são curvas planas.

(a) *Derive implicitamente a expressão $z = F(x,y)$ e encontre a equação do plano tangente ao $graf(F)$ no ponto $(a,b,7 = F(a,b))$, substituindo*

$$dx \to x - a \tag{2.31}$$
$$dy \to y - b \tag{2.32}$$
$$dz \to z - 7 \tag{2.33}$$

(b) *Derive implicitamente a expressão $F(x,y) = 7$ e encontre a equação da reta tangente ao $graf(F(x,y) = 7)$ substituindo*

$$dx \to x - a \tag{2.34}$$
$$dy \to y - b \tag{2.35}$$

e faça o gráfico da curva $F(x,y) = 7$ assim como da reta tangente.

(c) *Deduza de $F(x,y) = 7$ a expressão de $y = g(x)$, calcule $g'(x)$ e deduza qual é relação entre*

$$g'(x), \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$$

(d) *Dissertação Considerando que* tangência *é uma espécie de equivalência, justifique $graf(F)$ é uma superfície e $graf(F(x,y) = 7)$ é uma curva.*

12. *Enuncie um teorema* Teorema da Função Implícita *que estabeleça a conexão entre uma expressão diferenciável $z = F(x,y)$, uma solução $c = F(a,b)$ e uma função $y = g(x)$ (ou $x = g(y)$), sua derivada e as derivadas parciais de F*

2.2 Teorema da Função Implícita

O Teorema da Função Implícita estabelece que, se uma equação

$$F(x_1, x_2) = c \;;\; F(a_1, a_2) = c \tag{2.36}$$

em que $\vec{a} = (a_1, a_2)$ é uma solução conhecida da equação $F(x_1, x_2) = c$, ou em outras palavras (a_1, a_2) é um ponto por onde a curva de nível passa, e se $\frac{\partial F}{\partial x_2}|_{(a_1, \vec{a_2})} \neq 0$ então a variável x_2 pode ser explicitada como função de x_1:

$$x_2 = g(x_1) \quad g'(a_1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial x_2}} \tag{2.37}$$

com as derivadas parciais de F calculadas no ponto $\vec{a}$.

Quer dizer, tudo que sabemos sobre a função g que explicita a variável x_2 relativamente a outra variável, é a derivada de g. Isto permite escrever aproximações de g usando-se a derivada e o ponto (a_1, a_2) por onde passa a curva.

Exercícios 7 *aproximação e reta tangente*

1. *Considere a curva $f(x,y) = 0$ com*

$$f(x,y) = x^3 + 2x^2y + y^2$$

Derive implicitamente $f(x,y) = 0$ para achar a reta tangente num ponto (a,b). fazendo as substituições

Aplicação

$$dx \to x - a$$
$$dy \to y - b$$
$$x \to a \;;\; y \to b = f(a) \;; mz$$

e observando sempre que em "dx" não tem x...

2. *Verifique $(1,-1)$ é uma solução da equação $f(x,y) = 0$. Faça o gráfico da reta tangente a esta curva no ponto $(1,-1)$ e calcule uma solução aproximada de $f(x,y) = 0$ para $x = 1.1$ usando a a equação da reta tangente. Calcule uma estimativa do erro cometido com esta aproximação. A figura (fig. 2.1) página 64,*

aproximação diferencial

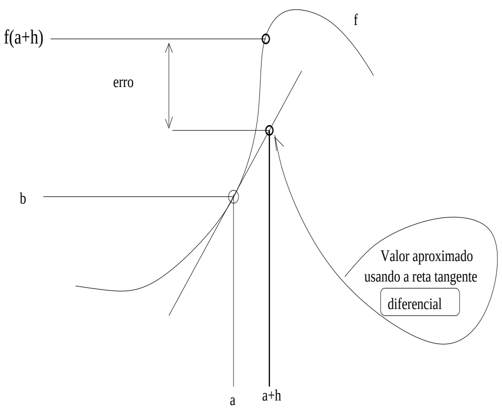


Figura 2.1: Aproximação diferencial

Ao final do capítulo você poderá encontrar uma versão mais completa do Teorema da Função Implícita. Será versão que estaremos usando em seguida.

Do ponto de vista das equações diferenciais, entretanto, o Teorema da Função Implícita, resolve um tipo de equações diferenciais chamadas exatas, é o que passaremos a ver agora.

2.3 Equações diferenciais exatas

Vamos agora iniciar o sentido recíproco. Considere uma expressão diferencial da forma

$$dz = P(x_1, x_2)dx_1 + Q(x_1, x_2)dx_2 = 0 \tag{2.38}$$

Se houver uma função

$$\mathbf{R}^2 \supset \Omega \xrightarrow{F} \mathbf{R}\ ; z = F(x_1, x_2) \tag{2.39}$$

definida num domínio $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ tal que

$$dz = P(x_1, x_2)dx_1 + Q(x_1, x_2)dx_2 = dF \tag{2.40}$$

então dz é um *diferencial exato* e

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = P, \frac{\partial F}{\partial x_2} = Q \tag{2.41}$$

O problema é que dada uma expressão diferencial como a equação (eq. 38), não sabemos, *a priori* se ela é ou não é um *diferencial exato*.

Para testar precisamos do seguinte teorema:

Teorema **1** *Teorema de Schwarz das derivadas mistas*
Seja $F : \mathbf{R}^n \supset \Omega \to \mathbf{R}$ *que tenha derivadas até a segunda ordem contínuas, então*

$$\frac{\partial F^2}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial F^2}{\partial x_j \partial x_i}$$

em outras palavras, a ordem de derivação, no cálculo das derivadas mistas, é irrelevante.

Agora o teorema de Schwarz das derivadas mistas nos oferece um meio para testar a existência da função F :

- se houver uma função $z = F(x_1, x_2)$ tal que

$$dz = P(x_1, x_2)dx_1 + Q(x_1, x_2)dx_2 = dF = \frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}dx_2 \tag{2.42}$$

- então

$$\frac{\partial P}{\partial x_2} = \frac{\partial F^2}{\partial x_2 \partial x_1} \tag{2.43}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x_1} = \frac{\partial F^2}{\partial x_1 \partial x_2} \tag{2.44}$$

$$\frac{\partial F^2}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial F^2}{\partial x_1 \partial x_2} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x_2} = \frac{\partial Q}{\partial x_1} \tag{2.45}$$

isto é,

$$dz = P(x_1, x_2)dx_1 + Q(x_1, x_2)dx_2 \tag{2.46}$$

somente será um *diferencial exato* se

$$\frac{\partial P}{\partial x_2} = \frac{\partial Q}{\partial x_1} \tag{2.47}$$

e temos assim um método para testar se uma equação diferencial da forma (eq. 38) é uma *equação diferencial exata*.

Neste caso sabemos que existe uma função F tal que a curva de nível

$$F(x_1, x_2) = c \tag{2.48}$$

para um valor admissível de c, é uma solução desta equação.

E todas as curvas que puderem ser obtidas com o parâmetro c *variando dentro de um conjunto admissível*, descreve a solução geral desta equação.

Demonstramos assim o critério:

Teorema **2** *Teste da equação diferencial exata*
Considere a expressão diferencial

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n}dx_n = 0. \tag{2.49}$$

Se

$$\frac{\partial F^2}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial F^2}{\partial x_j \partial x_i} \tag{2.50}$$

então a expressão diferencial (eq. 49) é um diferencial exato[3] *e assim a equação diferencial (eq.49) é uma* equação diferencial exata *e tem solução e todas as soluções são da forma*

$$F(x_1, \ldots, x_n) = c$$

para as constantes c admissíveis.

Nos exemplos abaixo você vai encontrar mais informações sobre o que significa este *conjunto admissível*, mas, de imediato, se trata do conjunto de números reais que c pode assumir, o que depende da equação.

Tudo que temos que fazer é encontrar F calculando as primitivas das expressões que multiplicam os diferenciais relativamente à variável indicada pelo diferencial, *uma espécie de primitivação parcial*.

Exercícios 8 *Equações diferenciais exatas*
Verifique quais das equações abaixo é exata e resolva as que forem.

1. $(sin(xy) + xycos(xy))dx + x^2cos(xy)dy = 0$
2. $(x^3 + xy^2)dx + (x^2y + y^3)dy = 0$
3. $ysin(xy)dx + xsin(xy)dy = 0$

[3] quer dizer, existe F tal que $dF = \frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n}dx_n$

4. $\frac{y}{xy}dx + \frac{x}{xy}dy = 0$

5. $(yzsin(xyz)dx + xy^2z^2dycos(xyz))dz = 0$

6. $(xysin(xyz)dx + (x^2yz^2sin(xyz))dy + dz = 0$

7.
$$P(x,y,z) = yzsin(y^2+3xy+x^2) + (3xy^2+2x^2y)z + zcos(y^2+3xy+x^2)$$
$$Q(x,y,z) = xzsin(y^2+3xy+x^2) + (2xy^2+3x^2y)z + zcos(y^2+3xy+x^2)$$
$$R(x,y,z) = z(xy^3+3x^2y^2+x^3y)cos(y^2+3xy+x^2)$$
$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0$$

8. $2xsin(y)dx + x^2cos(y)dy = 0$

9. $yexp(xy)dx + xexp(xy)dy = 0$

10. $(ysin(x^2y^3) + 2x^2y^4cos(x^2y^3)dx + (xsin(x^2y^3 + 3x^3y^3cos(x^2y^3)))dy = 0$

11.
$$P(x,y) = (ysin(y^2+3xy+x^2) + (3xy^2+2x^2y)cos(y^2+3xy+x^2)$$
$$Q(x,y) = xsin(y^2+3xy+x^2) + (2xy^2+3x^2y)cos(y^2+3xy+x^2)$$
$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

12. *Na figura (2.3) página 77,*

    se encontram três famílias de curvas mas apenas uma pode ser de soluções de uma equação diferencial. Identifique qual e justifique a sua decisão citando um teorema.

2.4 Variedades

variedades

Nesta seção vamos introduzir o conceito de *variedade*, mas o alertamos que o objetivo não é o de intoxicá-lo com conceitos. Leia rapidamente o texto, e passe para os exercícios em que os conceitos são usados, e depois volte para uma segunda leitura do texto.

ampliando os horizontes geométricos

Se o *objetivo for atingido*, você deve compreender que existe uma limitação linguística que a geometria nos impõe e que é preciso romper para ampliar os horizontes.

A palavra *variedade* significa um objeto que generaliza as noções geométricas *ponto, reta, plano, espaço*:

Figura 2.2: Soluções de uma equação diferencial

1. variedade de dimensão zero são os pontos;
2. variedade linear de dimensão um são as retas;
3. variedade de dimensão um são as curvas, e observe que uma reta é uma curva (linear);
4. variedade linear de dimensão dois são os planos;
5. variedade de dimensão dois são as superfícies e observe que planos são um tipo particular de superfície, aquelas que são determinadas por duas retas concorrentes num ponto;
6. variedade linear de dimensão três é o espaço geométrico;

7. variedade de dimensão quatro é o `espaço-tempo` da Física, por exemplo; Os Físicos insistem que esta variedade não é linear porque não existem retas no Universo uma vez que toda *massa* em movimento sofre atração gravitacional de alguma outra *massa* no Universo e assim o seu movimento não pode ser uniforme (será variadamente acelerado)...aí eles dizem que o `espaço-tempo` é curvo, quer dizer, não é uma variedade linear.

8. hiperplano é a maior variedade linear contida em um determinado espaço, (experimente ler os itens abaixo de trás para frente, pode ficar mais didático. . .)

   - os hiperplanos do `espaço-tempo` são as translações do `espaço geométrico`;
   - os hiperplanos do `espaço geométrico` são os planos;
   - os hiperplanos dos planos são as retas;
   - os hiperplanos das retas são os pontos.

A palavra *hiperplano* tem um sentido relativo. Ela representa o maior subespaço de um espaço que o divide em duas metades.

- Os pontos dividem as retas em duas semi retas, por isto eles são os hiperplanos das reta;
- As retas dividem os planos em dois semiplanos, por isto elas são os hiperplanos dos planos;
- Os planos dividem o espaço $3D$ em dois semiespaços, por isto eles são os hiperplanos dos espaços $3D$;
- Um espaço $3D$ é um hiperplano de um espaço $4D$ onde ele esteja contido.

A partir da dimensão 4 a nossa linguagem geométrica nos abandona e já não temos palavras, na língua coloquial, (geométrica), para designar estas *variedades.* Esta lista de exercícios irá abrir-lhe um pouco mais o Universo...

Precisamos desta linguagem porque nem sempre a solução de uma equação diferencial é uma curva de nível. Será uma *variedade de nível* com uma certa dimensão. Se a dimensão for 1, é uma curva, mas nós poderemos falar *uma variedade não linear de dimensão 1*, com a nossa nova linguagem.

A lista de exercícios tem por objetivo treinar a nova linguagem. Talvez, em cada caso, você devesse escrever ao lado, na margem, os antigos nomes da *defasada geometria tridimensional*...

Exercícios 9 *Variedades tangentes*

1. *Subvariedade de $graf(F)$*

   (a) *Considere um ponto $(a, b, c = F(a, b))$ em $graf(F)$. Derive implicitamente a expressão $F(x, y) = c$. Encontre a equação da variedade tangente a $F(x, y) = c$ no ponto $(a, b, c = F(a, b))$ substituindo*

$$dx \to x - a \tag{2.51}$$
$$dy \to y - b \tag{2.52}$$

e verifique que esta variedade tangente é uma reta.

   (b) *Considerando que* tangência *é uma espécie de equivalência, justifique, a partir da variedade tangente ao $graf(F(x, y) = c)$ porque $graf(F(x, y) = c)$ é uma variedade de dimensão um.*

2. *Variedade de dimensão 3*

   (a) *Considere a função*

$$\Omega \subset \mathbf{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbf{R}.$$

continuamente diferenciável num domínio do $\mathbf{R}^3$. Derive implicitamente a expressão $w = F(x, y, z)$ e encontre a equação da variedade tangente ao $graf(F)$ no ponto $(a, b, c, d = F(a, b, c))$, substituindo

$$dx \to x - a \tag{2.53}$$
$$dy \to y - b \tag{2.54}$$
$$dz \to z - c \tag{2.55}$$
$$dw \to w - d \tag{2.56}$$

   (b) *Verifique que esta variedade tangente é um hiperplano do $\mathbf{R}^4$. Que dimensão tem esta variedade?*

   (c) *Considerando que* tangência *é uma espécie de equivalência, justifique, a partir da variedade tangente ao $graf(F)$ porque $graf(F)$ é uma variedade de dimensão três.*

   (d) *Subvariedade Considere um ponto $(a, b, c, d = F(a, b, c))$ em $graf(F)$. Derive implicitamente a expressão $F(x, y, z) = d$ e encontre a equação da variedade tangente a $F(x, y, z) = d$ no ponto $(a, b, c, d = F(a, b, c))$ substituindo*

$$dx \to x - a \tag{2.57}$$
$$dy \to y - b \tag{2.58}$$
$$dz \to z - c \tag{2.59}$$

e verifique que esta variedade tangente é um plano,(um hiperplano do $\mathbf{R}^3$).

   (e) *Considerando que* tangência *é uma espécie de equivalência, justifique, a partir da variedade tangente a $F(x, y, z) = d$ porque $F(x, y, z) = d$ é uma variedade de dimensão dois.*

2.5 Fator integrante

Nem sempre que aplicarmos o teste do Teorema 50 o resultado será positivo. E pode acontecer que a equação seja exata. O próximo exemplo vai lhe mostrar qual pode ser a razão disto.

Exemplo 2 *Uma equação que parece não ser exata*

Um professor, ao preparar um teste, tomou a função

$$F(x,y)+x^3sen(y^2); \tag{2.60}$$

calculando-lhe o diferencial total

$$3x^2sen(y^2)dx+2x^3ycos(y^2)dy=0 \tag{2.61}$$

*mas colocou no teste a seguinte "*equação diferencial*"*

$$3sen(y^2)dx+2xycos(y^2)dy=0 \tag{2.62}$$

em que estamos vendo *que ele,* secretamente*, cancelou o fator comum x^2 e os alunos deveriam verificar se era uma "*equação diferencial exata*".*

Como

$$P(x,y)=3sen(y^2) \;\Rightarrow\; \frac{\partial P}{\partial y}=6ycos(y^2) \tag{2.63}$$
$$Q(x,y)=2xycos(y^2) \;\Rightarrow\; \frac{\partial Q}{\partial x}=2ycos(y^2) \tag{2.64}$$
$$\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x} \tag{2.65}$$

os alunos concluíram que a equação não era exata. Ao corrigir o exercício, entretanto, o professor sugeriu que possivelmente a equação poderia ser transformada numa equação exata se a multiplicasse por um fator a que ele deu o nome de fator integrante*, sugerindo o fator x^2 o que resultou na equação diferencial exata original.*

Este exemplo mostra que, ao testarmos se uma equação diferencial é exata, o resultado pode ser negativo pela falta de um *fator integrante*. O nosso objetivo é mostrar como podemos descobrir um tal fator que torne uma expressão diferencial

$$dz=P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \tag{2.66}$$

numa equação diferencial exata.

Como não sabemos que fator é este, vamos chamá-lo $\mu(x,y)$ escrevendo

$$\mu(x,y)P(x,y)dx+\mu(x,y)Q(x,y)dy=0 \tag{2.67}$$

e agora vamos *impor* a condição de que ela seja exata, e assim encontrar $\mu(x,y)$. Vamos usar a notação μ_x para representar $\frac{\partial\mu}{\partial x}$.

$$\frac{\partial\mu P}{\partial y}=\mu_yP+\mu P_y \tag{2.68}$$
$$\frac{\partial\mu Q}{\partial x}=\mu_xQ+\mu Q_x \tag{2.69}$$
$$\text{por hipótese } \mu_yP+\mu P_y=\mu_xQ+\mu Q_x \tag{2.70}$$
$$\mu_yP+\mu P_y-\mu_xQ-\mu Q_x=0 \tag{2.71}$$
$$\mu_yP+(P_y-Q_x)\mu-\mu_xQ=0 \tag{2.72}$$

Neste ponto tentamos simplificar as contas, por exemplo com a hipótese de que $\mu_y=0$ que significa "μ" é independente de y (ou, apenas função de s). Se isto não der certo, invertemos a hipótese: $\mu_x=0$. E se isto também não der certo, somente resta tentar a solução mais complicada...

Não se esqueça, resolver equações diferenciais, *exatamente*, sempre oferece desafios duros, e há muitas que ninguém sabe resolver. Claro, *soluções aproximadas* em geral são o que nos resta.

Continuando, com a hipótese $\mu_y=0$ temos

$$\mu_yP+(P_y-Q_x)\mu-\mu_xQ=0 \tag{2.73}$$
$$\mu_y=0 \;\Rightarrow\; (P_y-Q_x)\mu-\mu_xQ=0 \tag{2.74}$$
$$(P_y-Q_x)\mu=\mu_xQ \tag{2.75}$$
$$\frac{\mu_x}{\mu}=\frac{P_y-Q_x}{Q} \tag{2.76}$$
$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{(P_y-Q_x)dx}{Q} \tag{2.77}$$
$$ln(\mu)=\int_{x_0}^{x}\frac{(P_y(t,y)-Q_t)(t,y)dt}{Q(t,y)} \tag{2.78}$$

Se conseguirmos calcular esta integral exatamente temos a expressão μ para corrigir a equação diferencial.

Nos exercícios seguintes você poderá exercitar a arte de descobrir fatores integrantes.

Exercícios 10 *Fator integrante Verifique se as equações abaixo são exatas, e não sendo veja se é possível encontrar um fator $\mu(x)$ que multiplicado pelos termos da equação produza uma* equação diferencial exata*.*

1. $(x+y^2)dx-2xydy=0$
2. $2xyln(y)dx+(x^2+y^2\sqrt{y^2+1})dy=0$
3. $(ycos(xy)-ysin(xy))dx+(xcos(xy)-xsin(xy))dy=0$
4. $ye^{xy}dx+xe^{xy}dy=0$
5. $(2x+3y)dx+(3x+10y)dy=0$
6. $\frac{(x^2+y^2)(2x+3y)-2x(3y^3+3xy+x^2)}{(x^2+y^2)^2}dx\frac{(x^2+y^2)(9y^2+3x)-2y(3y^3+3xy+x^2)}{(x^2+y^2)^2}dx=0$
7. $(ytan^2(xy)+y)dx+(xtan^2(xy)+x)dy=0$
8. $(ycos^2(xy)-ysin^2(xy))dx+(xcos^2(xy)-xsin^2(xy))dy=0$

Vamos resolver, detalhadamente, dois dos exercícios do segundo bloco acima.

1. Temos $P(x,y) = (x+y^2)$ e $Q(x,y) = -2xy$. $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = -2y$ então vamos procurar um função μ tal que

$$P\mu dx + Q\mu dy = 0$$

seja exata, μ é chamada *um fator integrante*.

$$\frac{\partial}{\partial y}P\mu = \frac{\partial P}{\partial y}\mu + P\frac{\partial \mu}{\partial y} = \tag{2.79}$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}[(x+y^2)\mu] = 2y\mu + (x+y^2)\frac{\partial \mu}{\partial y} = \tag{2.80}$$
$$= -\frac{\partial}{\partial x}[2xy\mu] = -2y\mu - 2xy\frac{\partial \mu}{\partial x} \Longrightarrow \tag{2.81}$$
$$4y\mu + (x+y^2)\frac{\partial \mu}{\partial y} + 2xy\frac{\partial \mu}{\partial x} \Longrightarrow \tag{2.82}$$

Uma das técnicas presentes na resolução de equações diferenciais é esta:

*C*omplicamos o problema introduzindo um *fator* que *explode* a equação inicial com surgimento de novas parcelas, analisamos as parcelas em busca de uma hipótese adequada que faça o novo problema cair em uma situação conhecida.

Neste caso esta expressão pode ser simplificada se fizermos a hipótese de que μ seja univariada, por exemplo, função apenas de x ou função apenas de y o que fará que uma parcela da expressão acima se anule.

Podemos fazer as duas hipóteses, uma de cada vez, para ver de qual podemos tirar melhor resultado. Deixaremos a hipótese "μ é função apenas de y" para que você experimente, e vamos seguir com hipótese "μ é função apenas de x" o que nos conduz a

$$4y\mu(x) + (x+y^2)\frac{\partial \mu}{\partial y} + 2xy\frac{\partial \mu}{\partial x} \Longrightarrow \tag{2.83}$$
$$4y\mu(x) + 2xy\frac{\partial \mu}{\partial x} \Longrightarrow \tag{2.84}$$
$$2\mu(x) + x\mu' \Longrightarrow 2\mu(x) = -x\mu' \Longrightarrow \tag{2.85}$$
$$-\frac{2}{x} = \frac{\mu'}{\mu} \Longrightarrow \tag{2.86}$$
$$ln(\mu) = -2\ln(x) = -ln(x^2) \equiv \mu(x) = \frac{1}{x^2} + C \tag{2.87}$$

Como queremos <u>uma</u> solução da equação diferencial μ podemos tomar $C = 0$ portanto a equação

$$-(\frac{(x+y^2)}{x^2})dx + \frac{2y}{x}dy = 0$$

é uma equação diferencial exata cuja solução é

$$F(x,y) = C \tag{2.88}$$

com

$$F(x,y) = \int_0^y \frac{2t}{x}dt = \frac{y^2}{x} + C(x) \tag{2.89}$$
$$F(x,y) = \int_1^x -(\frac{(t+y^2)}{t^2})dt + C(y) = \tag{2.90}$$
$$= -ln(x) + \frac{y^2}{x} + C(y) \Longrightarrow \tag{2.91}$$
$$F(x,y) = -ln(x) + \frac{y^2}{x} = C \Longrightarrow \tag{2.92}$$
$$x = Cexp(\frac{y^2}{x}) \tag{2.93}$$

em que a constante C não é a mesmas nas duas ocorrências.

2. $2xy\ ln(y)dx + (x^2 + y^2\sqrt{y^2+1})dy = 0 = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

Como $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x\ln(y) + 2x \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$ então vamos procurar um *fator integrante* μ tal que

$$P(x,y)\mu(x)dx + Q(x,y)\mu(x)dy = 0$$

seja uma equação diferencial exata.

$$\frac{\partial}{\partial y}(P(x,y)\mu(x)) = \frac{\partial P}{\partial y}\mu + P\frac{\partial \mu}{\partial y} = \tag{2.94}$$
$$(2x\ln(y) + 2x)\mu + 2xy\ ln(y)\frac{\partial \mu}{\partial y} = \tag{2.95}$$
$$2x\ln(y)\mu + 2x\mu + 2xy\ ln(y)\frac{\partial \mu}{\partial y} = \tag{2.96}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(Q(x,y)\mu(x)) = \frac{\partial Q}{\partial x}\mu + Q\frac{\partial \mu}{\partial x} = \tag{2.97}$$
$$2x\mu + (x^2 + y^2\sqrt{y^2+1})\frac{\partial \mu}{\partial x} \tag{2.98}$$

e caímos numa *equação diferencial parcial de primeira ordem na variável* μ o que, aparentemente, torna o problema mais complicado ...

$$2x\ln(y)\mu + 2xy\ ln(y)\frac{\partial \mu}{\partial y} = (x^2 + y^2\sqrt{y^2+1})\frac{\partial \mu}{\partial x} \tag{2.99}$$

mas se supusermos que μ é função apenas de y poderemos simplificar o problema:

$$2x\ ln(y)\mu + 2xy\ ln(y)\mu' = 0 \overset{(x\neq 0; y\neq 1)}{\equiv} \tag{2.100}$$
$$\mu = -y\mu' \equiv \frac{\mu'}{\mu} = -\frac{1}{y} \equiv \tag{2.101}$$
$$ln(\mu) = -ln(y) + C(C=0) \Longrightarrow\Longrightarrow \mu = \frac{1}{y} \tag{2.102}$$

a constante "$C = 0$" induz uma solução particular para a equação diferencial em μ, que é tudo que precisamos, e a equação diferencial exata é:

$$2xy\ ln(y)\frac{1}{y}dx + (x^2 + y^2\sqrt{y^2+1})\frac{1}{y}dy = 0$$

e a podemos determinar F

$$F(x,y) = \int 2x\ ln(y)dx = x^2\ ln(y) + C(y) \qquad (2.103)$$
$$F(x,y) = \int (x^2 + t^2\sqrt{t^2+1})\frac{1}{y}dy = \qquad (2.104)$$
$$F(x,y) = x^2\ ln(y) + \frac{2}{3}(t^2+1)^{3/2} + C(x) \qquad (2.105)$$
$$F(x,y) = x^2\ ln(y) + \frac{2}{3}(t^2+1)^{3/2} \qquad (2.106)$$

sendo a solução da equação diferencial a família de curvas

$$F(x,y) = C$$

para uma constante C admissível e as regiões do plano que são domínio de F são determinadas pelas condições que fizemos ao resolver as equações:

$$x > 0\ ou\ x < 0 \text{ e } y > 1\ ou\ y \in (0,1)$$

3. Uma partícula é conduzida por um fluido se pendendo observar que a velocidade plana da partícula, em um ponto (x,y) qualquer é o vetor $2yi + 4xj$.
   (a) Desenhe alguns pontos do plano mostrando a direção do movimento da partícula. Ver as figuras.
   (b) Com um programa de computador desenhe no plano uma malha *razoavelmente* densa de *pontos posição* associando aos mesmos o vetor tangente de modo a visualizar o fluxo das partículas carregadas pelo fluido. Ver as figuras.
   (c) Escreva a equação diferencial (vetorial) sugerida pelo problema, relativamente a variável *tempo*, dela deduza uma equação da forma $\frac{dy}{dx} = g(x,y)$. Verifique que é uma equação *a variáveis separáveis* e a resolva.
   (d) Encontre o caminho da partícula que passa no ponto $(-1,4)$. Queremos encontrar a curva $y^2 - 2x^2 + C = 0$ tal que, $y = 4 \Rightarrow x = -1$. O valor de $C = 14$.

Exercícios 11 *Equações diferenciais exatas*
Verifique quais das equações abaixo é exata e resolva as que forem.

1. $(sin(xy) + xycos(xy))dx + x^2cos(xy)dy = 0$
2. $(x^3 + xy^2)dx + (x^2y + y^3)dy = 0$
3. $ysin(xy)dx + xsin(xy)dy = 0$

4. $\frac{y}{xy}dx + \frac{x}{xy}dy = 0$
5. $(yzsin(xyz)dx + xy^2z^2dycos(xyz))dz = 0$
6. $(xysin(xyz)dx + (x^2yz^2sin(xyz))dy + dz = 0$
7.
$$P(x,y,z) = yzsin(y^2+3xy+x^2) + (3xy^2+2x^2y)z + zcos(y^2+3xy+x^2)$$
$$Q(x,y,z) = xzsin(y^2+3xy+x^2) + (2xy^2+3x^2y)z + zcos(y^2+3xy+x^2)$$
$$R(x,y,z) = z(xy^3+3x^2y^2+x^3y)cos(y^2+3xy+x^2)$$
$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0$$
8. $2xsin(y)dx + x^2cos(y)dy = 0$
9. $yexp(xy)dx + xexp(xy)dy = 0$
10. $(ysin(x^2y^3) + 2x^2y^4cos(x^2y^3)dx + (xsin(x^2y^3 + 3x^3y^3cos(x^2y^3)))dy = 0$
11.
$$P(x,y) = (ysin(y^2+3xy+x^2) + (3xy^2+2x^2y)cos(y^2+3xy+x^2)$$
$$Q(x,y) = xsin(y^2+3xy+x^2) + (2xy^2+3x^2y)cos(y^2+3xy+x^2)$$
$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$
12. *Na figura (2.3) página 77,*
   se encontram três famílias de curvas mas apenas uma pode ser de soluções de uma equação diferencial. Identifique qual e justifique a sua decisão citando um teorema.

2.6 Solução de alguns exercícios

1. (ex. 3) página 75 Partícula conduzida por um fluido tendo como velocidade plana em um vetor posição $\vec{u}' = 2yi + 4xj$.

   Solução 25 *(a) Ver as figuras*

   (b) Com um programa de computador desenhe no plano uma malha razoavelmente *densa de* pontos posição *associando aos mesmos o vetor tangente de modo a visualizar o fluxo das partículas carregadas pelo fluido. Ver a figura (fig. 2.4) página 78,*

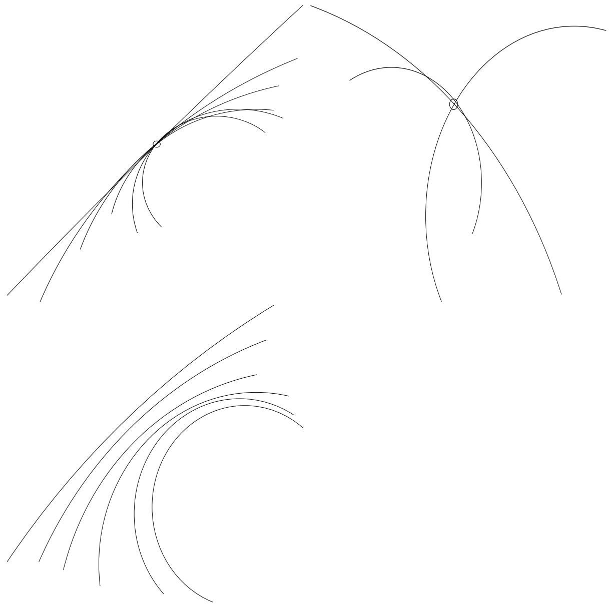


Figura 2.3: Soluções de uma equação diferencial

(c) *A equação diferencial vetorial é* $(x', y') = (2y, 4x)$.
Esta equação pode ser desmembrada e reagrupada assim

$$\frac{dx}{dt} = 2y; \tag{2.107}$$

$$\frac{dy}{dt} = 4x; \tag{2.108}$$

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx} \tag{2.109}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x}{2y} = \frac{2x}{y} \tag{2.110}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y} \tag{2.111}$$

A (eq.111) é uma equação à variáveis separáveis que logo resolveremos.
No momento observe que, como consequência do Teorema da Função

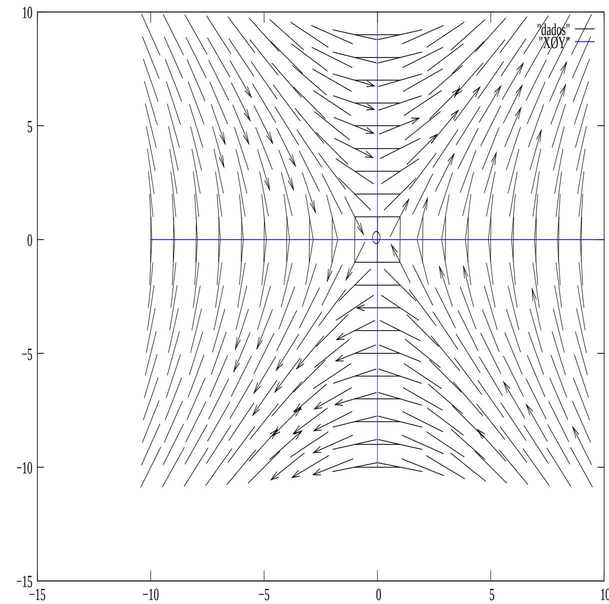


Figura 2.4: campo vetorial tangente

implícita, existe uma função $y = g(x)$ *cuja derivada foi calculada na (eq.111)*
Resolvendo a equação diferencial obtida:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y} \tag{2.112}$$

$$ydy = 2xdx \tag{2.113}$$

$$y^2 = 2x^2 + C \tag{2.114}$$

A (eq.114)

$$y^2 = 2x^2 + C$$

representa uma família de hipérboles cujos eixos podem ser obtidos *com o valor assintótico $C = 0$*

$$y^2 = 2x^2 \equiv |y| = \sqrt{2}|x| \qquad (2.115)$$

Veja a figura (fig. 2.5) página 80,

```
 f1(x) = sqrt(2*x**2 + 1)
 f_1(x) = -sqrt(2*x**2 + 1)
 f2(x) = -sqrt(2*x**2 + 2)
 f_2(x) = -sqrt(2*x**2 + 2)
 f2(x) = sqrt(2*x**2 + 2)
 f3(x) = sqrt(2*x**2 +  10)
 f_3(x) = -sqrt(2*x**2 +  10)
 f4(x) = sqrt(2*x**2 +  30)
 f_4(x) = -sqrt(2*x**2 +  30)
 f5(x) = sqrt(2)*abs(x)
 f_5(x) = -sqrt(2)*abs(x)
 plot f1(x),f_1(x),f2(x),f_2(x),\
f3(x),f_3(x),f4(x),f_4(x),0,f5(x),f_5(x)
```

que foi obtida com a sequência acima de comandos do `Gnuplot`.

Se você quiser refazer o gráfico com `Gnuplot`, *copie os comandos acima na* shell *do* `Gnuplot`, *inclusive a barra reversa ao final da penúltima linha que serve para interromper uma linha muito longa. Ou altere as constantes para obter uma família diferente de hipérboles.*

*Editamos a figura para nela incluir os ramos "*não funcionais*" de hipérboles.*

Na figura (fig. 2.5) você pode observar quatro vetores tangentes obtidos com a equação diferencial. Eles indicam o sentido natural em que as órbitas desta equação são percorridas (o sentido em que a partícula é empurrada pelo fluxo).

(d) *Queremos encontrar a curva $y^2 = 2x^2 + C = 0$ passando no ponto $(-1, 4)$.*

$$y^2 = 2x^2 + C \qquad (2.116)$$

$$1 - 32 = C \Longrightarrow C = -31 \qquad (2.117)$$

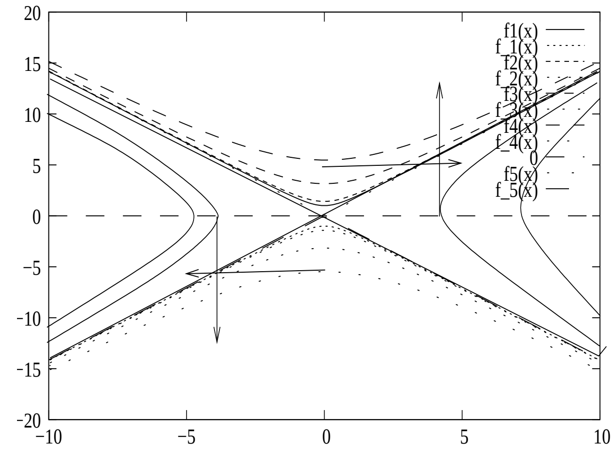
$$(2.118)$$

Solução singular é uma solução que não pode ser obtida por meios "regulares", ou melhor dizendo, são soluções que somente se podem obter quando se considera o limite *da família de soluções. No presente caso temos os eixos da família de hipérboles*

$$y = \pm\sqrt{2}x \Longrightarrow y' = \pm\sqrt{2} \qquad (2.119)$$

$$y = \sqrt{2}x \Longrightarrow y' = \frac{2x}{y} = \frac{2x}{\sqrt{2}x} = \sqrt{2} \qquad (2.120)$$

$$y = -\sqrt{2}x \Longrightarrow y' = \frac{2x}{y} = \frac{2x}{-\sqrt{2}x} = -\sqrt{2} \qquad (2.121)$$



Observe os vetores tangentes.

Figura 2.5: Família de hipérboles

Nas equações (eq. 120) e (eq. 121) usamos que o coeficiente angular de uma reta que passa na origem é o quociente entre as ordenadas de um ponto qualquer da reta (que não seja o ponto na origem) e que o coeficiente angular da reta é o valor da derivada da função do primeiro grau (equação desta reta).

Estes cálculos mostram que a fronteira *da região definida pelas soluções é uma solução. São* soluções singulares *que somente podem ser obtidas. quando* passamos ao limite.

Este tipo de solução tem uma importância muito grande, porque elas representam situações de deformação intensa, *ou* stress *que um sistema passa,* o sistema modelado pelas equações diferenciais.

Nem sempre podemos, com cálculos "aritméticos" explicitar uma variável numa expressão como
$$F(x,y,z)=0$$
a partir da qual gostaríamos de escrever $z=f(x,y)$, por exemplo.
Vamos discutir um método que permite fazer aproximações lineares da função f, isto é, mesmo que não possamos obter f formalmente, poderemos calcular a equação do plano tangente, e portanto podemos calcular aproximações de $z\in\mathcal{B}(z_0,\epsilon)$ se conhecermos uma solução
$$z_0=f(a,b)\equiv F(z,b,z_0)=0$$

2.7 Aproximação e aplicação

É perigoso estudar pensando em *aplicações* pois esta forma utilitarista de pensar mutila o desenvolvimento. Diversos matemáticos, como Hardy[4], ousaram dizer que "*se soubessem que um determinado assunto que estavam estudando, serviria para alguma coisa, parariam imediatamente de estudá-lo*". A atitude "purista" de Hardy não precisa ser fielmente seguida, mas tem sentido. Leia em outro lugar um pouco da biografia de Roger para ver como é perigoso o pensamento "*utilitarista*.

Entretanto alguns precisam ir buscar nas aplicações a motivação para o aprendizado. Nós não fugimos a esta regra, apenas não colocamos a *aplicabilidade* como uma qualidade do conhecimento.

Suponhamos que por alguma "motivação" você tenha que resolver a equação
$$F(x,y,z)=c$$
explicitando, por exemplo, z como função de x,y. Nem sempre é possível fazer isto com operações aritméticas, mesmo que F seja uma *expressão algébrica*.

Se calcularmos a *derivada implícita* de $F(x,y,z)=c$ encontramos
$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0 \tag{2.122}$$
e se conhecermos uma solução $F(a,b,z_0)=c$
$$\frac{\partial F}{\partial x}|_(a,b,z_0)(x-a)+\frac{\partial F}{\partial y}|_(a,b,z_0)(y-b)+\frac{\partial F}{\partial z}|_(a,b,z_0)(z-z_0)=0 \tag{2.123}$$
em que na última equação temos a expressão da *variedade linear* tangente ao gráfico da *variedade de nível* $\underline{c}$,
$$F(x,y,z)=c$$
no ponto (a,b,z_0).

[4]Godfrey Harold Hardy (Fevereiro, 1877 Cranleigh-Dezembro, 1947,Cambridge)

A equação desta *variedade linear* permite que explicitemos qualquer uma das variáveis em função das outras duas, por exemplo
$$\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0 \tag{2.124}$$
$$\frac{\partial F}{\partial z}|_(a,b,z_0)(z-z_0)=-\frac{\partial F}{\partial x}|_(a,b,z_0)(x-a)-\frac{\partial F}{\partial y}|_(a,b,z_0)(y-b) \tag{2.125}$$
$$z-z_0=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}(x-a)-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}(y-b) \tag{2.126}$$
$$z-z_0=A(x-a)+B(y-b) \tag{2.127}$$
$$A=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\ ;\ B=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \tag{2.128}$$
em que omitimos na penúltima equação a indicação de que derivação está sendo calculada no ponto (a,b,z_0).

Neste caso particular temos a equação de um plano tangente a uma *superfície de nível* em que os números $-A,-B$ são as derivadas parciais da equação deste plano.

Como as derivadas parciais na equação de um plano coincidem com as derivadas parciais de uma superfície à qual este plano seja tangente, então existe uma função diferenciável f
$$z=f(x,y) \tag{2.129}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}|(a,b)=-A \tag{2.130}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}|(a,b)=-B \tag{2.131}$$
Assim não sabemos qual é a expressão da função f que nos permita explicitar z como função de x,y mas conhecemos suas derivadas e eventualmente podemos recuperar a equação de f a partir de sua derivadas, mas não consideramos isto como um objetivo neste momento.

Demonstramos assim o teorema

Teorema **3** *Teorema da função implícita*
Seja F uma função diferenciável e consideremos a variedade de nível
$$F(x,y,z)=c$$
que tenha uma solução conhecida
$$F(a,b,z_0)=c$$
Se
$$\frac{\partial F}{\partial z}|_{(a,b,z_0)}\neq 0$$
podemos encontrar uma função f tal que
$$z=f(x,y);z_0=f(a,b) \tag{2.132}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}|(a,b)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \tag{2.133}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}|(a,b)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \tag{2.134}$$

O teorema está enunciado de forma incompleta, como é fácil de ver-se com a hipótese

$$\frac{\partial F}{\partial z}|_{(a,b,z_0)} \neq 0$$

que poderia ter sido

$$\frac{\partial F}{\partial x}|_{(a,b,z_0)} \neq 0$$

permitindo então que explicitássemos a *variável* x em vez da variável z. Deixamos que o leitor pesquise na literatura uma formulação mais completa deste teorema.

Capítulo 3

Equações Lineares

Neste capítulo vou discutir um classe de equações que é muito importante porque é o único tipo de equação sobre as quais nós sabemos tudo, apesar de que nem sempre as consigamos resolver.
Para que você entenda o paradoxo que você acaba de ler, lembre-se que nós sabemos tudo sobre equações polinomiais apesar de que somente saibamos resolver as equações polinomiais até o quatro grau, quer dizer, dada uma equação polinomial qualquer, com esforço bruto, uso de programas de computador, sempre a poderemos resolver, pelo menos aproximadamente. Algo semelhantes podemos dizer das equações de que trata o presente capítulo, as equações diferenciais lineares, que inclusive dependem de equações algébricas para serem resolvidas.

Vamos estudar a classe mais importante de equações diferenciais ordinárias, *equações diferenciais lineares*

- é a classe de equações sobre a qual sabemos tudo, o que não significa que saibamos resolver qualquer equação linear, e a dificuldade é a mesma que temos quando queremos calcular integrais, sabemos o que elas querem dizer, mas nem sempre as sabemos calcular, exatamente.
- são as equações que melhor descrevem grande maioria dos fenômenos da natureza, ou pelo menos ficam muito próximas desta melhor descrição.

Vamos dividir o capítulo em três momentos:

1. *O nome* Faremos algumas contas para justificar o nome que é dado a estas equações, Possivelmente este *momento* deve ser saltado em uma primeira

leitura, use sua liberdade, não se sentindo motivado, salte para a próxima seção.

2. Algumas formas de solução

   - *Método histórico* depois usaremos um método histórico de solução das equações, "mecânico" mas que leva, simplesmente, à solução de algumas equações.
   - *A generalização do método* Vamos mostrar que uma equação de ordem n induz um sistema de n equações lineares de primeira ordem concluindo que seremos levados de volta ao caso simples

   $$y' = Ay$$

   em que *apenas* $y \in \mathbf{C}^n$ é um vetor de dimensão n e A é uma matriz n x n, e cairemos no método matricial, ou vetorial que dá uma capacidade de análise bem maior às EDL.

3. Coeficientes variáveis O que descrevemos acima não se aplica às equações cujos coeficientes são variáveis. Vamos ver alguns casos deste tipo.

   O método matricial é importantíssimo na análise quando os coeficientes forem variáveis.

   Veremos que a teoria montada para o casos dos coeficientes constantes deixa de aplicar aqui.

   Vamos ver que a análise das equações lineares, como um *sistemas dinâmicos* torna possível uma compreensão geométrica das soluções destas equações, *uma teoria geométrica*, como é algumas vezes mencionada.

3.1 Equações diferenciais lineares

Vamos resolver equações da forma

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b$$

em que a_k são constantes, reais ou complexas.
As equações deste tipo se chamam *lineares*. Nesta seção vamos tratar da razão do nome e chegar a um teorema que descreve como são as soluções deste tipo de equações.

As *equações diferenciais lineares* são uma aplicação direta de grande parte da Álgebra Linear e vamos fazer, aqui, uma apresentação da teoria com esta formatação.

A derivada é uma transformação linear definida num espaço vetorial de funções deriváveis. Vamos introduzir a derivada aplicando-a em polinômios. Para isto vamos destacar que os polinômios são caracterizados pelos seus coeficientes, a variável serve apenas para estabelecer a ordem como os coeficientes devem ser usados.

Usamos apenas o coeficientes para somar ou multiplicar polinômios e usamos apenas os coeficientes para derivá-los, também. Veja como podemos entender um polinômio, e sua derivada, nos cálculos que se seguem:

$$P(x) = 1 + 3x - x^2 + 2x^3 + x^4 \tag{3.1}$$
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^5 \tag{3.2}$$
$$P'(x) = 3 - 2x + 6x^2 + 4x^3 \tag{3.3}$$
$$P' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \tag{3.4}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = DP = P' \tag{3.5}$$

Uma matriz 4 x 5 calcula a derivada de qualquer polinômio do grau 4, transformando-o num polinômio de grau 3

$$D : \mathbf{R}^5 \longrightarrow \mathbf{R}^4 ; P \mapsto DP = P'$$

transforma o espaço vetorial de dimensão 5 no espaço vetorial de dimensão 4.

Se designarmos por D o *operador derivada* e considerarmos o espaço vetorial de dimensão $n + 1$ dos polinômios univariados de grau menor ou igual a n, $\mathbf{R}_n[x]$, podemos ver que a matriz D de dimensão, n x $n+1$ calcula a derivada de qualquer polinômio de grau n.

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{bmatrix} \tag{3.6}$$
$$D : \mathbf{R}^{n+1} \approx \mathbf{R}_n[x] \longrightarrow \mathbf{R}^n \approx \mathbf{R}_{n-1}[x] \tag{3.7}$$

A lista de exercícios seguinte é um laboratório que vai conduzi-lo a compreender porque as *equações diferenciais* de um determinado tipo são chamadas *lineares*.

Também, nos exercícios, vou convidá-lo a fazer algumas contas com a matriz que calcula a derivada de uma função polinomial de um determinado grau.

O objetivo é acostumá-lo com a ideia de que a derivada é um operador linear, (a derivada ou combinação linear de derivadas).

Exercício 1 *O operador derivada*

1. *Matriz da derivada de polinômios Identifique o polinômio*

$$P(x) = 1 + 3x + 4x^2$$

com a matriz $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ *dos coeficientes. Encontre uma matriz* 2 x 3 *que associa* $P =$ *à matriz do polinômio derivada* $\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$. *Verifique que a mesma matriz "calcula" a derivada de qualquer polinômio do segundo grau.*

2. *Matriz da derivada de polinômios* *Identifique o polinômio*

$$P(x) = 1 + 3x + 4x^2 + 2x^3$$

com a matriz $P = (1\ 3\ 4\ 2)$ *dos coeficientes. Encontre uma matriz* 3 x 4 *que associa* $P = (1\ 3\ 4\ 2)$ *à matriz do polinômio derivada* $(3\ 8\ 6)$. *Verifique que a mesma matriz 'calcula" a derivada de qualquer polinômio do terceiro grau.*

3. *Matriz da derivada de polinômios*

Verifique que a derivada de um polinômio do grau n *pode ser obtida se aplicando uma matriz à matriz dos coeficientes. Encontre a matriz deste* operador derivada. *Sugestão, escreva*

$$P(x) = a_0 + \cdots + a_n x^n \equiv (a_0, \cdots, a_n)$$

calcule $P'(x)$ *e escreva* P' *na forma matricial e depois calcule a matriz que transforma* P *em* P'.

4. *Operador Diferencial*

Definição 4 *Operador Diferencial*

Chamamos operador diferencial *a uma "expressão"* $\mathcal{D}$ *que associe uma função diferenciável com uma expressão envolvendo suas derivadas junto com* operações aritméticas, *por exemplo, uma combinação linear de derivadas da função. Os* operadores diferenciais *podem ser lineares ou não lineares (no sentido da Álgebra Linear).*

Esta seção vai introduzir uma notação para os operadores diferenciais *Relembrando a derivada de ordem* n *e introduzindo um símbolo para esta derivada.*

Vamos verificar que o símbolo $\partial^n = \frac{d^n}{dx^n}$, *a derivada de ordem* n, *representa um* operador diferencial linear[1]

(a) *Operador derivada*
Verifique que a operação que associa

$$f \mapsto \partial(f) = \partial^1(f) = f'$$

é um operador linear. Calcule

- $\partial(sin)$.
- $\partial(cos)$.
- $\partial(\partial(cos))$.
- $\partial(\partial(sin))$.
- $\partial(cos + isin)$.
- $\partial(\partial(cos + isin))$.

(b) *Operador derivada*
Verifique que a operação que associa

$$f \mapsto \partial^2(f) = \partial(\partial(f)) = f''$$

é um operador linear. Calcule $\partial^2(\alpha cos + \beta sin)$ *em que* α, β *são duas constantes (reais ou complexas).*

(c) *Operador diferencial*
Verifique que a operação que associa

$$f \mapsto \mathcal{D}(f) = \partial^0(f) + \partial^1(f) + \partial^2(f) = f + f' + f''$$

é um operador (diferencial) linear. Calcule

- $\mathcal{D}(sin)$.
- $\mathcal{D}(cos)$.
- $\mathcal{D}(\alpha cos + \beta sin)$.

(d) *Operador diferencial* *Verifique que a operação*

$$f \mapsto \mathcal{D}(f) = a_0\partial^0(f) + a_1\partial^1(f) + a_2\partial^2(f) = a_0 f + a_1 f' a_2 f''$$

é um operador linear, a coeficientes constantes. Os coeficientes são a_0, a_1, a_2. *Calcule*

- $\mathcal{D}(sin)$.
- *Se* P *for um polinômio com coeficientes* $(1, 0, -3, 0, 4, -5)$, *na ordem crescentes das potências, calcule* $\mathcal{D}(P)$. *Qual é o grau de* P *e de* $\mathcal{D}(P)$ *?*

(e) *Identidade: Operador derivada*
Verifique que é razoável considerar a identidade como sendo o operador diferencial linear de ordem zero. *Compare esta* extensão *com alguma outra* extensão de conceito *que você conheça em Matemática, descreva explicitamente a comparação.*

(f) *Rescreva a equação diferencial*

$$a_0 y + a_1 y' + a_2 y'' + a_3 y''' = 0$$

usando a notação de operador diferencial ∂.

[1] satisfaz à definição de *operador linear* da Álgebra Linear e a *imagem* é a derivada da *pré-imagem*

(g) Expressão polinomial *Verifique que a inclusão da* identidade *como* operador derivada *permite associar o polinômio*

$$P(x) = a_0 + a_1x^1 + \ldots + a_nx^n$$

com o operador diferencial

$$P(\partial) = a_0 + a_1\partial^1 + \ldots + a_n\partial^n$$

e calcule

$$P(\partial)(sin)$$

Escreva um pequeno texto justificando o uso da identidade *como operador diferencial.*

(h) *A notação $P(\partial)$ permite-nos escrever de forma simples uma equação diferencial linear de ordem n. Faça isto.*

(i) Operador diferencial a coeficientes variáveis *Nos itens anteriores, o* operador diferencial *tinha coeficientes constantes. Verifique que o operador diferencial que associa*

$$f(x) \mapsto x\partial^0(f) + 3x\partial^1(f) + sen(x)\partial^2(f) = \tag{3.8}$$

$$= \partial(f)(x) = xf(x) + 3xf'(x) + sen(x)f''(x) \tag{3.9}$$

$$\tag{3.10}$$

é um operador diferencial linear,∂ dito a coeficientes variáveis, Identifique os coeficientes deste operador diferencial.

(j) Representação polinomial *Sendo $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ escreva o operador linear*

$$P(\partial)$$

associado ao polinômio P e calcule $P(\partial)f$ em que

$$f(x) = 3xcos(x) + 2x^2sin(x)$$

(k) Operador diferencial: soma de derivadas

Como qualquer combinação linear de operadores diferenciais é um operador diferencial, verifique que se usarmos a notação ∂^k para representar a derivada de ordem k então a expressão

$$P(\partial)(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k\partial^k(f)$$

em que f é uma função, pelo menos n vezes derivável, representa um operador linear no espaço das funções $C^n(\mathbf{R})$.

Definição 5 *Operador Diferencial Linear - ODL*

Notação: $P(\partial) = \sum_{k=0}^{n} a_k\partial^{(k)}$ *é um operador diferencial linear de ordem n.*

Definição 6 *Equação diferencial linear - EDL Uma equação diferencial vai ser dita* linear *se ela for da forma*

$$P(\partial)(y) = b$$

em que $P(\partial)$ é um ODL associado a um polinômio P. Se o polinômio P for de grau n, diremos que a EDL

$$P(\partial)(y) = B \tag{3.11}$$

é uma diferencial linear de ordem n.

Se $b = 0$ diremos que a equação é homogênea*, quando $b \neq 0$ a equação é chamada* geral *ou* não homogênea.

Observe que o segundo membro, b pode ser uma função, assim como os coeficientes do polinômio P podem ser também funções o que faz da equação uma *equação diferencial a coeficientes variáveis*. Obviamente este tipo de equação é bem mais difícil e neste texto não vamos discutir *equação diferencial a coeficientes variáveis*.

Vejamos a razão do nome, e a importância deste tipo de equação diferencial.

Exercícios 12 *Equação diferencial linear - razão do nome*

1. *Destaque o polinômio P associado a cada uma das equações diferenciais lineares abaixo*

equação	P	*equação*	P
a)$y'' + 4y' = 0$		b) $y''' = 0$	
c)$y + y' + 2y'' = 3x$		d) $y'' = 0$	
e)$3y + 4y' + 3xy'' = 0$		f) $y' = 0$	

Duas, das equações, são a coeficientes variáveis, quais ?

2. *Considere o operador $\partial^k(y) = y^{(k)}$ e escreva*

$$a_ny^{(n)} + \cdots + a_1y' + a_0y = b$$

expressa como uma soma destes operadores.

3. ODL *Chame ∂ o operador*

$$P(\partial) = \sum_{k=0}^{n} a_k\partial^k$$

e mostre que

(a) $\partial(y_1 + y_2) = \partial(y_1) + \partial(y_2)$

(b) $\partial(\lambda y) = \lambda\partial(y)$

(c) $\partial(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1\partial(y_1) + \lambda_2\partial(y_2)$

quer dizer que ∂ é um operador linear.

4. dependência do tempo *Chame ∂ o operador*

$$P(\partial) = \sum_{k=0}^{n} a_k(t)\partial^k$$

em que a_k são funções univariadas[2]*, para todo k, mostre que as identidades abaixo valem, em que y_j são funções da mesma variável x.*

(a) $\partial(y_1 + y_2) = \partial(y_1) + \partial(y_2)$

(b) $\partial(\lambda y) = \lambda\partial(y)$

(c) $\partial(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1\partial(y_1) + \lambda_2\partial(y_2)$

quer dizer que ∂ é um operador linear a coeficientes variáveis.

5. dependência do tempo *Chame ∂ o operador*

$$P(\partial) = \sum_{k=0}^{n} a_k(t, x)\partial^k$$

em que a_k são funções que dependem das variáveis t, x para todo k, mostre que as identidades abaixo valem, em que y_j são funções da variável x.

(a) $\partial(y_1 + y_2) = \partial(y_1) + \partial(y_2)$

(b) $\partial(\lambda y) = \lambda\partial(y)$

(c) $\partial(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1\partial(y_1) + \lambda_2\partial(y_2)$

quer dizer que ∂ é um operador linear a coeficientes variáveis.

6. Equações dependentes de um parâmetro *Chame ∂ o operador*

$$P(\partial) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)\partial^k$$

em que a_k é uma função univariada, para todo k, mostre que as identidades abaixo valem, em que y_j é uma função da variável t.

(a) $\partial(y_1 + y_2) = \partial(y_1) + \partial(y_2)$

(b) $\partial(\lambda y) = \lambda\partial(y)$

[2] se a_k for uma função constante, dizemos que os coeficientes do operador são "constantes", caso contrário, dizemos que os coeficientes são variáveis

(c) $\partial(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1\partial(y_1) + \lambda_2\partial(y_2)$

Neste caso, não vamos considerar *os coeficientes variáveis, e sim, vamos dizer que temos uma* equação dependente de um parâmetro.

7. operador linear *Escreva um exemplo de*

   (a) *operador linear a coeficientes constantes de ordem 4.*

   (b) *operador linear a coeficientes variáveis de ordem 5.*

   (c) *operador linear dependente de um parâmetro.*

8. equação homogênea e não homogênea

   Chame "equação homogênea"*aquela que podemos escrever como*

$$\partial(y) = 0$$

   associada a "equação geral - não homogênea"*que será*

$$\partial(y) = b.$$

   Prove que se y_1, y_2 forem duas soluções da equação homogênea *então $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ também o será para escalares arbitrários λ_k. Observe que os coeficientes de ∂ podem ser constantes ou variáveis.*

9. *Prove que se $y_1, \dots, y_n$ forem soluções da* equação homogênea *então*

$$\lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_n y_n$$

   também o será para escalares arbitrários $\lambda_1, \cdot\lambda_n$.

10. *Prove que se y_1, y_2 forem soluções da* equação geral *então $y_1 - y_2$ será uma solução da equação homogênea.*

11. Solução geral da equação não homogênea

    Conclua que

    - *Se a equação não homogênea tiver* pelo menos duas *soluções, a diferença entre elas é uma solução da equação homogênea.*
    - *uma solução qualquer da equação geral é da forma*

$$y_h + y_g$$

      em que y_h é a solução geral da homogênea *e y_g é uma solução particular da* geral

3.1.1 Solução de alguns dos exercícios

1. Como $y^{(n)} = \partial^n(y)$ então $a_n y^{(n)} = a_n \partial^n(y)$ e assim Considere o operador $\partial^n(y) = y^{(n)}$ e escreva

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = a_n \partial^n(y) + \cdots + a_1 \partial(y) + a_0 \partial^0(y) = b$$

2. ODL

   Como, para cada ordem k de diferenciação vale a linearidade da derivada, $\partial^k(y_1 + y_2) = \partial^k(y_1) + \partial^k(y_2)$ e como multiplicando por constantes ainda temos $\partial^k(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 \partial^k(y_1) + \lambda_2 \partial^k(y_2)$ então vale a para soma das derivadas (que é a expressão de ∂

$$\partial(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 \partial(y_1) + \lambda_2 \partial(y_2)$$

   quer dizer que ∂ é um operador linear.

3. Demonstração por indução finita

   O exercício anterior representa o primeiro passo da demonstração por *indução finita*. Vamos agora supor que a afirmação vale para um número natural arbitrário m, ou seja:

$$\sum_{k=0}^{m} a_k(t) \partial^k$$

   é um operador linear. Vamos agora estudar a linearidade de

$$\partial = \sum_{k=0}^{m+1} a_k(t) \partial^n.$$

   Consideremos para isto duas funções y_1, y_2 de classe $\mathcal{C}^{m+1}$, que tenham, pelo menos, $m + 1$ derivadas contínuas. Aplicando ∂ temos:

$$\partial(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \tag{3.12}$$

$$\sum_{k=0}^{m+1} a_k(t) \partial^k(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \tag{3.13}$$

$$\sum_{k=0}^{m} a_k(t) \partial^k(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) + a_{m+1}(t) \partial^{m+1}(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \tag{3.14}$$

$$= \lambda_1 \sum_{k=0}^{m} a_k(t) \partial^k(y_1) + \lambda_2 \sum_{k=0}^{m} a_k(t) \partial^k(y_2) + \tag{3.15}$$

$$+ \lambda_1 a_{m+1}(t) \partial^{m+1}(y_1) + \lambda_2 a_{m+1}(t) \partial^{m+1}(y_2) \tag{3.16}$$

$$\lambda_1 \sum_{k=0}^{m} a_k(t) \partial^k(y_1) + \lambda_1 a_{m+1}(t) \partial^{m+1}(y_1) + \tag{3.17}$$

$$\lambda_2 \sum_{k=0}^{m} a_k(t) \partial^k(y_2) + \lambda_2 a_{m+1}(t) \partial^{m+1}(y_2) + \tag{3.18}$$

$$\lambda_1 \sum_{k=0}^{m+1} a_k(t) \partial^k(y_1) + \lambda_2 \sum_{k=0}^{m+1} a_k(t) \partial^k(y_2) \tag{3.19}$$

$$\lambda_1 \partial(y_1) + \lambda_2 \partial(y_2) \tag{3.20}$$

   Usamos a (1) hipótese de indução no somatório até m e (2) que o operador derivada de ordem qualquer, $m + 1$, é linear. Na última linha apenas rearrumamos uma soma finita.

4. operador linear Exemplo de

   (a) operador linear a coeficientes constantes de ordem 4.

$$y^{(4)} + 3y^{(3)} - 2y'' - y' + 4y = \sum_{k=0}^{4} \partial^{(k)}(y)$$

   (b) operador linear a coeficientes variáveis de ordem 5.

$$3xy^{(4)} + 3x^2 y^{(3)} - 2xy'' - y' + 4y = \sum_{k=0}^{4} a_k(x) \partial^{(k)}(y)$$

5. Consideremos duas soluções y_1, y_2 da *equação homogênea*, então

$$\partial(\lambda_1 y_1) = \lambda_1 \partial(y_1) = 0 = \lambda_2 \partial(y_2) = \partial(\lambda_2 y_2)$$

   e pela linearidade

$$\partial(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = 0$$

   Observe que os coeficientes de ∂ podem ser constantes ou variáveis, mas λ_1, λ_2 são constantes reais ou complexas.

6. Solução geral da equação não homogênea Considere duas soluções arbitrárias y_1, y_2 da equação geral, então

$$\partial(y_1) = b$$
$$\partial(y_2) = b$$
$$\partial(y_1) - \partial(y_2) = b - b = \partial(y_2 - y_1) = 0$$

   porque ∂ é linear,

$$\partial(y_2 - y_1) = \partial(y_2) - \partial(y_1)$$

   Defina: $y_h = y_2 - y_1$ e y_h é uma solução da *equação homogênea* consequentemente, uma solução qualquer y_2 da *equação geral* é da forma

$$y_2 = y_h + y_1$$

   em que y_h é solução da homogênea e y_1 é uma solução da geral. Esta frase em geral é expressa assim:

uma solução *geral* y da *equação não homogênea* é da forma

$$y = y_h + y_p$$

em que y_h é a solução geral da equação homogênea e y_p é uma solução particular da equação geral.

A diferença entre as duas formas de se expressar é psicológica... e contém a ideia de que em princípio é mais fácil resolver a *equação homogênea* e relativamente simples de se encontrar uma solução particular para a *equação geral*.

Duas inverdades... suportáveis.

O último item da lista de exercícios acima é o teorema principal desta seção. É um teorema típico da classe de teoremas que chamamos *teoremas de existência*. Um *teorema de existência* parece inútil, ele não conduz diretamente a um algoritmo para resolver alguma coisa, ele apenas diz que a solução existe e como ela pode ser. Quando tivermos um teorema de existência podemos nos debruçar num programa de computador para construir a solução ... trabalhar *cegamente* numa solução aproximada, sem um teorema de existência, pode representar uma perda de tempo, embora isto algumas vezes seja feito quando não há outra alternativa.

Teorema **4** *Existência de solução das EDLs A equação diferencial linear $\partial(y) = 0$ sempre existe, porque a função constante zero é uma solução. Se houver uma solução diferente da trivial, há um espaço vetorial de soluções de dimensão no máximo igual a ordem de ∂.*

Se a equação $\partial(y) = b$ tiver uma solução y_g, qualquer outra solução é da forma

$$y = y_g + y_h \ ; \ \partial(y_h) = 0$$

Como os *operadores diferenciais lineares* são *transformações lineares* definidas no espaço das funções diferenciáveis, eles simplesmente herdam as propriedades dos operadores lineares da Álgebra Linear.

As *equações diferenciais lineares* se chamam assim porque se encontram associadas a *operadores diferenciais lineares*.

3.2 Solução das equações diferenciais lineares

Na seção precedente justificamos o nome *equação diferencial linear* de uma equação do tipo

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 = b.$$

Agora vamos resolver algumas destas equações.

Vamos mostrar, fazendo cálculos que herdamos dos nossos antepassados, que a função exponencial é solução de uma EDL. uma solução "descoberta"

Antes de prosseguir, vamos fazer um ajuste na forma de escrever estas equações. Observe que $a_n = 0$ não tem sentido, porque simplesmente teríamos uma equação de ordem $n-1$ portanto, sempre, podemos dividir por a_n :

$$y^{(n)} + \cdots + \frac{a_1}{a_n} y' + \frac{a_0}{a_n} = \frac{b}{a_n} \tag{3.21}$$

então simplificaremos definitivamente a notação escrevendo as equação diferenciais lineares

$$y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 = b \tag{3.22}$$

Você *ainda* poderia argumentar que, a_n sendo uma função, isto poderia fazer surgir um problema de domínio de definição. Não é verdade que isto "faça aparecer um problema de domínio de definição", ele na verdade já existiria... apenas ficaria, agora, em evidência, se a função $a_n(x)$ fosse igual a zero em alguns pontos. Vou voltar a discutir este detalhe mais a frente quando discutir *coeficientes variáveis*. Por enquanto os coeficientes serão constantes.

Os exercícios seguintes são um *laboratório* para ajudar a compreensão da teoria e representam a experiência dos que inicialmente se debruçaram sobre as equações diferenciais. Todos os exercícios estão resolvidos ao final do capítulo mas um esforço inicial seu para tentar resolver é parte integrante do processo de aprendizado. Ir buscar uma sugestão na solução também faz parte do método, mas a *pura leitura das soluções* é uma forma de se enganar no aprendizado.

Exercícios 13 *Solução das equações lineares*

1. *Polinômio característico Considere o operador linear*

$$P(\partial)(y) = y' + py$$

Calcule $P(\partial)(y)$ quando $y = e^{at}$, em que t representa a variável tempo. Prove que $P(\partial)(y) = P(a)e^{at}$, em que P é o polinômio (polinômio característico) e resolva a equação algébrica

$$P(\partial)(y) = P(a)e^{at} = 0$$

Verifique que $y = e^{at}$ é solução da equação diferencial homogênea, em que a é a solução da equação polinomial (polinômio característico).

2. *Polinômio característico Calcule a imagem, pelo operador linear*

$$P(\partial)(y) = y'' + py' + qy$$

de $y = e^{at}$

Escreva o polinômio associado a $P(\partial)$ [3]. Resolva a equação algébrica $P(\partial)(y) = 0$, e verifique que sua solução envolve as raízes, a_1, a_2 do polinômio característico P como "aceleradores" da exponencial $y = e^{at}$.

[3] 'e o chamado *polinômio característico* da equação diferencial linear

Escreva as exponenciais resultantes e verifique que elas resolvem a equação diferencial homogênea.

3. *Polinômio característico.* *Encontre os polinômios característicos e resolva a equações diferenciais homogêneas usando o método descrito nos exercícios anteriores.*

a) $5y' + 6y = 0$	b) $y'' + 2y' + y = 0$
c)$y'' - 2y' + 1y = 0$	d) $y'' + 3y' + 2y = 0$
e)$y''' + y' = 0$	f) $y''' + y'' + y' + y = 0$
g)$y''' - y'' + y' - y = 0$	h) $y''' - y = 0$
i)$y''' + y = 0$	j) $y'' - y = 0$
k)$y'' + y = 0$	l) $y'' - y' = 0$

4. *Espaço solução* *Encontre as duas soluções para a equação linear homogênea*

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

da forma

$$y_1 = e^{a_1 t}, y_2 = e^{a_2 t}.$$

Verifique que elas são vetores linearmente independentes. *Verifique que qualquer combinação linear destas soluções é uma nova solução da equação diferencial. Qual seria, no mínimo, a dimensão do espaço de soluções ?*

5. *Espaço solução* *Encontre duas soluções para a equação linear homogênea*

$$y'' + 2y' - 8y = 0$$

da forma

$$y_1 = e^{a_1 t}, y_2 = e^{a_2 t}.$$

Verifique que as soluções são vetores linearmente independentes e qual seria, no mínimo, a dimensão do espaço de soluções ?

6. *método do fator integrante - equação de primeira ordem*

Considere a equação diferencial linear não homogênea de primeira ordem

$$P(\partial)(y) = y' + 3y = 2x$$

(a) *equação homogênea associada* *Resolva a equação homogênea*

$$P(\partial)(y) = 0$$

(b) *Na* equação não homogênea, *substitua $y := \mu y$ em que μ é uma função da variável $\underline{x}$, e expanda a equação obtida. Observe que na expação você pode identificar*

$$P(\partial)(\mu)$$

Faça uma hipótese sobre μ que simplifique a equação e a resolva.

(c) *Encontre a solução da* equação não homogênea original.

*** aqui*

Solução 26

$$y := \mu y \quad \Rightarrow \quad (\mu y)' + 3(\mu y) = 2x \tag{3.23}$$

$$\mu' y + \mu y' + 3\mu y = P(\partial)(\mu) + \mu y' = 2x \tag{3.24}$$

$$\mu y' = 2x \quad \Rightarrow \quad y' = \tfrac{2x}{\mu} \quad \Rightarrow \quad y = \int \tfrac{2x}{\mu} + C \tag{3.25}$$

Na equação (24) expandi a substituição $y := \mu y$ e na equação (25) posso identificar $P(\partial)(\mu)$ ao qual apliquei a hipótese de que μ satisfaça à equação homogênea. Isto é legal, é uma hipótese plausível porque toda equação homogênea tem solução, veja a solução:

$$P(\partial)(\mu) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = e^{-3x} \tag{3.26}$$

que posso agora substituir na equação (25) para obter

$$y = \int \tfrac{2x}{e^{-3x}} + C = \int 2xe^{3x} + C \tag{3.27}$$

$$y = (\tfrac{2x}{3} - \tfrac{2}{9})e^{3x} + C \tag{3.28}$$

a passagem na equação (28) foi feita por integração por partes.

Retornando à equação inicial onde havia sido feita a substituição $y := \mu y$ chegamos a solução dividindo a solução obtida por μ

$$y = \frac{1}{\mu}(\frac{2x}{3} - \frac{2}{9})e^{3x} + \frac{C}{\mu} = (\frac{2x}{3} - \frac{2}{9})e^{6x} + Ce^{3x} \tag{3.29}$$

que posso testar como solução da equação original:

$$y' + 3y = 2x \tag{3.30}$$

$$\tfrac{2}{3}e^{6x} + 6(\tfrac{2x}{3} - \tfrac{2}{9})e^{6x} + 3Ce^{3x} + (2x - \tfrac{2}{3})e^{6x} + 3Ce^{3x} = \tag{3.31}$$

$$\tfrac{2}{3}e^{6x} + 6(\tfrac{2x}{3} - \tfrac{2}{9})e^{6x} + 6Ce^{3x} + (2x - \tfrac{2}{3})e^{6x} = \tag{3.32}$$

$$\tag{3.33}$$

7. *método do fator integrante.* *Considere a equação:*

$$y'' + 3y' + 6y = 2x.$$

Substitua $y := \mu y$ na equação diferencial

- *expanda a equação,*
- *agrupe em termos de y, y', y''*
- *e faça uma hipótese "*viável*" sobre μ* [4]*que torne a equação trivial e a resolva, encontrando uma solução particular da equação não homogênea.*

[4] lembre-se que você já sabe resolver equações homogêneas o que lhe deve conduzir a construir a hipótese sobre μ

8. *método do fator integrante. Repita o método usando no exercício anterior para resolver a equação*

$$y'' + 5y' + 6y = 2x.$$

Substitua $y := \mu y$, expanda a equação, agrupe em termos de y e faça hipóteses sobre μ que torne a equação trivial e a resolva, encontrando uma solução particular da equação não homogênea.

Solução 27 • *a)*

$$y := \mu y \qquad (\mu y)'' + 5(\mu y)' + 6(\mu y) = 2x \tag{3.34}$$
$$\mu'' y + 2\mu' y' + \mu y'' + 5(\mu' y + \mu y') + 6(\mu y) = 2x \tag{3.35}$$
$$(\mu'' + 5\mu' + 6\mu)y + (2\mu' + 5\mu)y' + \mu y'' = 2x \tag{3.36}$$
$$P(\partial)(\mu)y + (2\mu' + 5\mu)y' + \mu y'' = 2x \tag{3.37}$$
$$(2\mu' + 5\mu)y' + \mu y'' = 2x \tag{3.38}$$
$$(2\mu' + 5\mu)z + \mu z' = 2x \tag{3.39}$$
$$x^2 + 5x + 6 = 0 \Longrightarrow x \in \{-2, -3\} \tag{3.40}$$
$$P(\partial)(y) = 0 \Longrightarrow y \in \{e^{-2t}, e^{-3t}\} \tag{3.41}$$
$$y = e^{-2t}, y = e^{-3t} \text{ \textit{são soluções da homogênea}} \tag{3.42}$$

• *b)*

$$P(\partial)((\lambda y_1 + \beta y_2) = \tag{3.43}$$
$$= (\lambda y_1 + \beta y_2)'' + 5(\lambda y_1 + \beta y_2)' + 6(\lambda y_1 + \beta y_2) = \tag{3.44}$$
$$= (\lambda' y_1 + \lambda y_1' + \beta' y_2 + \beta y_2')' + 5\lambda' y_1 + 5\lambda y_1' + 5\beta' y_2 + 5\beta y_2' + 6\lambda y_1 + 6\beta y_2 = \tag{3.45}$$
$$= \lambda'' y_1 + 2\lambda' y_1' + \lambda y_1'' + \beta'' y_2 + 2\beta' y_2' + \beta y_2'' + \tag{3.46}$$
$$+5\lambda' y_1 + 5\lambda y_1' + 5\beta' y_2 + 5\beta y_2' + 6\lambda y_1 + 6\beta y_2 = \tag{3.47}$$
$$= \lambda P(\partial)(y_1) + \beta P(\partial)(y_2) + \lambda'' y_1 + 2\lambda' y_1' + \beta'' y_2 + 2\beta' y_2' + 5\lambda' y_1 + 5\beta' y_2 = \tag{3.48}$$
$$= \lambda'' y_1 + 2\lambda' y_1' + \beta'' y_2 + 2\beta' y_2' + 5\lambda' y_1 + 5\beta' y_2 = \tag{3.49}$$
$$= (\lambda'' + 5\lambda')y_1 + (\beta'' + 5\beta')y_2 + 2(\lambda' y_1' + \beta' y_2') = 3x \tag{3.50}$$

9. *Mostre 'genericamente" que uma combinação linear das soluções* linearmente independentes *de uma* equação homogênea, *mais a solução particular da não homogênea,é uma solução da equação não homogênea.*

10. *[5] Mostre que a solução geral de uma equação diferencial linear $L(y) = q$é da forma:*

$$y = C_1 y_{h_1} + C_2 y_{h_2} + y_{nh} \tag{3.51}$$
$$y_{h_1}, y_{h_2} \text{ \textit{soluções l.i. da homogênea}} \tag{3.52}$$
$$y_{nh} \text{ \textit{solução particular da não homogênea}} \tag{3.53}$$

11. *A exponencial*

Considere uma `EDL` *homogênea $a_1 y' + a_0 y = 0$. Verifique, por substituição, que existe uma função exponencial $y = e^{at}$ que resolve esta equação. Expresse a em função de a_1, a_0.*

[5]Depende de Álgebra linear

Solução:

$$(y = e^{at}) \Rightarrow \mathbf{a} a_1 e^{at} + a_0 e^{at} = 0$$
$$e^{at}(\mathbf{a} a_1 + a_0) = 0$$
$$e^{at} P(a) = 0 \Rightarrow a = -\frac{a_0}{a_1}$$
$$y = e^{at} \text{ \textit{é solução, com} } a = -\frac{a_0}{a_1}$$

12. *Encontre as solução do tipo $y = e^{at}$ para*

$$a)y' + 3y = 0 \quad b)\ y' - 3y = 0$$
$$c)4y' + 3y = 0 \quad d)\ y' + y = 0$$

13. *Equação de segunda ordem*

(a) *Polinômio característico*
Mostre que a substituição de $y = e^{at}$ em

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

se pode expressar como $P(a)e^{at} = 0$ em que P é um polinômio com raízes reais ou complexas. Escreva a solução da equação polinomial.

(b) *As duas soluções de uma equação de segunda ordem Encontre as solução do tipo $y = e^{at}$ para*

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

(c) *Independência linear Verifique sob que condições as duas soluções da equação Encontre as solução do tipo $y = e^{at}$ para*

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

são linearmente independentes.

(d) *Equação característica de grau n*
Mostre, substituindo $y = e^{at}$ em

$$a_n y^{(n)} + \cdots a_1 y' + a_0 y = 0$$

que existe uma equação polinomial do grau n, equação característica, associada a equação diferencial linear que induz as soluções $y_1, \ldots, y_n$ da EDL.

(e) *Mostre que dada uma EDL, as raízes distintas da* equação característica associada *produzem soluções linearmente independentes para a EDL homogênea.*

3.2.1 Solução dos exercícios

1. Por substituição de $y = e^{at}$ na equação, temos:

$$a_1\partial(e^{at}) + a_0e^{at} = a_1ae^{at} + a_0e^{at} = \tag{3.54}$$
$$= (a_1a + a_0)e^{at} = 0 \;\Rightarrow\; a_1a + a_0 = 0 \tag{3.55}$$
$$a = -\tfrac{a_0}{a_1} \tag{3.56}$$

e

$$y = e^{-\frac{a_0}{a_1}t}$$

é uma solução da equação diferencial. Obviamente que esta técnica não pode produzir outra solução, uma vez que caímos em uma equação polinomial do primeiro grau.

2. Soluções das equações de primeira ordem

$$\begin{array}{ll} \text{a)}y = exp(-3t) = 0 & \text{b) } y = exp(3t) \\ \text{c)}y = exp(\frac{3}{4}t) & \text{d) } y = exp(-t) \end{array}$$

3. Substituindo $y = e^{at}$ em $a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$ temos

$$a_2\partial(\partial(e^{at})) + a_1\partial(e^{at}) + a_0e^{at} = 0 \tag{3.57}$$
$$a_2a^2e^{at} + a_1ae^{at} + a_0e^{at} = 0 \tag{3.58}$$
$$(a_2a^2 + a_1ae^{at} + a_0)e^{at} = 0 \;\Rightarrow \tag{3.59}$$
$$a_2a^2 + a_1ae^{at} + a_0 = 0 \;\Rightarrow\; a \in \{a_1, a_2\} \tag{3.60}$$

Com as duas soluções (eventualmente complexas) a_1, a_2 da equação polinomial do segundo grau temos

$$y_1(t) = exp(a_1t)\ ;\ y_2(t) = exp(a_2t)$$

que resolvem a equação. Este método não pode produzir soluções diferentes das que encontramos, mas a combinação linear destas soluções também é uma solução.

A equação polinomial que surge assim se chama *equação polinomial característica associada a equação diferencial linear.*

4. Substituindo $y = e^{at}$ em

$$a_ny^{(n)} + \cdots a_1y' + a_0y = 0$$

vem

$$a_n\partial^{(n)}(e^{at}) + \cdots a_1\partial(e^{at}) + a_0e^{at} = 0 \tag{3.61}$$
$$a_na^ne^{at} + \cdots a_1ae^{at} + a_0e^{at} = 0 \;\Rightarrow \tag{3.62}$$
$$(a_na^n + \cdots a_1a + a_0)e^{at} = 0 \tag{3.63}$$

e como a exponencial é sempre diferente de zero temos a equação polinomial associada (equação polinomial característica associada), que, pelo Teorema Fundamental da Álgebra tem n soluções (eventualmente repetidas) e possivelmente complexas, como valores para a "variável" $\underline{a}$, expoente de $y = e^{at}$.

5. Considere duas raízes distintas a_1, a_2 da equação polinomial característica associada a uma EDL dada. Os exercícios anteriores mostram que

$$y_1 = e^{a_1t} \text{ e } y_2 = e^{a_2t}$$

são soluções da equação. Suponha

Hipótese 1 *Podemos encontrar* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C}$ *distintos de zero tal que* $\lambda_1y_1 + \lambda_2y_2 = 0$

então

$$y_1 = e^{a_1t} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_2}y_2 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_2}e^{a_2t}$$

como qualquer exponencial passa no ponto $(0, 1)$ então, substituindo

$$t = 0 \text{ ou } t = 1$$

na equação acima vemos que

$$y_1(0) = 1 = e^0 = -\tfrac{\lambda_2}{\lambda_2}y_2(0) = 1 \tag{3.64}$$
$$-\tfrac{\lambda_2}{\lambda_2} = 1 \tag{3.65}$$
$$\lambda_2 = \lambda_1 \tag{3.66}$$
$$y_1(1) = e^{a_1} = -\tfrac{\lambda_2}{\lambda_2}y_2(1) = e^{a_2} \tag{3.67}$$
$$-\tfrac{\lambda_2}{\lambda_2}y_2(1) = -\tfrac{\lambda_2}{\lambda_2}e^{a_2} \tag{3.68}$$
$$\lambda_2 \neq \lambda_1 \tag{3.69}$$

uma contradição que vem da hipótese absurda que fizemos e conseqüentemente a única solução para o par de números $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C}$ é que ambos sejam nulos o que nos leva à definição de *vetores linearmente independentes*:

$$\lambda_1y_1 + \lambda_2y_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \tag{3.70}$$

e as funções

$$y_1 = e^{x_1t}\ ,\ y_2 = e^{x_2t}$$

são linearmente independentes.

Os exercícios nos mostram um método para descobrir no máximo n soluções de uma EDL usando uma equação polinomial que chamamos de equação polinomial característica associada à EDL. O último exercício nos mostrou que para um par de soluções diferentes da *equação característica* corresponde um par de soluções linearmente independentes da EDL associada a esta equação característica. Isto demonstra o teorema

Teorema 5 *Espaço solução de uma EDL*
Uma EDL homogênea de ordem n tem no máximo n soluções linearmente independentes e a solução geral da equação homogênea é o espaço vetorial gerado pelas soluções linearmente independentes.

Rigorosamente falando os exercícios que precederam o teorema não contém a demonstração do mesmo. Por exemplo apenas conseguimos construir soluções linearmente independentes, que geram um espaço vetorial de soluções da EDL. Não há nada nos cálculos que fizemos acima que nos garantam que não há soluções diferentes das que encontramos.

Entretanto, pelo que fizemos na seção anterior, uma EDL se encontra associada a um *operador diferencial linear* que é uma *transformação linear* e as soluções da EDL representam o núcleo desta transformação linear, um espaço vetorial.

Este fato acrescenta um dado para a demonstração do teorema: "o conjunto das soluções de uma EDL é um espaço vetorial", mas ainda não temos informações suficientes para concluir que se trata de um espaço vetorial de dimensão finita.

Isto deixa este texto incompleto.

3.3 Representação matricial de uma EDL

Vamos deduzir nesta seção um sistema de equações de ordem de primeira ordem que representa uma EDL de ordem n.

Os exercícios seguintes contém a parte laboratorial que vai nos conduzir ao teorema principal desta seção.

Exercícios 14 *Sistema de equações associado a uma EDL*

1. *Acrescentando uma variável $z = y'$ deduza um sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem equivalente a*

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$$

2. *Mostre que o sistema associado com a equação*

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$$

tem duas soluções linearmente independentes bastando apenas que $a_2 \neq 0$.

3. *Acrescentando as variáveis $z = y'$; $w = z'$ deduza um sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem equivalente a*

$$a_3y''' + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$$

4. *Mostre que o sistema associado com a equação*

$$a_3y''' + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$$

tem três soluções linearmente independentes bastando apenas que $a_3 \neq 0$.

5. *Faça uma hipótese generalizando os resultados das questões anteriores para a EDL homogênea*

$$a_ny^{(n)} + \ldots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$$

3.3.1 Solução dos exercícios

1. Com $z = y'$ podemos escrever:

$$a_2z' + a_1y' + a_0y = 0 \quad (3.71)$$
$$z = y' \quad (3.72)$$

ou equivalentemente

$$a_2z' + a_1y' = -a_0y \quad (3.73)$$
$$y' = z \quad (3.74)$$

de onde deduzimos o produto de matrizes:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \quad (3.75)$$
$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -a_0y \\ z \end{pmatrix} \quad (3.76)$$
$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' = \mathcal{B} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \quad (3.77)$$
$$\mathcal{A}Y' = BY \quad (3.78)$$

em que A, B são matrizes 2 x 2.

A matriz $\mathcal{B}$ é uma matriz diagonal cuja determinante somente será zero se $a_0 = 0$ em cujo caso temos um sistema de equações mais simples para resolver.

2. O determinante do sistema associado com a equação $a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$ é a_2 e sendo diferente de zero diz que o espaço solução tem dimensão dois.

3. Com $z = y'$; $w = z'$ podemos deduzir de $a_3y''' + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$

$$a_3w' + a_2z' + a_1y' + a_0y = 0 \quad (3.79)$$
$$z = y' \; ; \; w = z' \quad (3.80)$$

ou equivalentemente

$$a_3w' + a_2z' + a_1y' = -a_0y \tag{3.81}$$
$$y' = z \; ; \; z' = w \tag{3.82}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_0y \\ z \\ w \end{pmatrix} \tag{3.83}$$
$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \\ w \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -a_0y \\ z \\ w \end{pmatrix} \tag{3.84}$$

o que nos dá um sistema da forma

$$Au' = Bu \tag{3.85}$$

em que A, B são matrizes 3 x 3.

4. O determinante do sistema associado com $a_3y''' + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$ é a_3 e portanto se $a_3 \neq 0$ o sistema terá três soluções linearmente independentes.

5. Considere a EDL homogênea $a_ny^{(n)} + \ldots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$ com as seguintes variáveis auxiliares $z_{n-1}, z_{n-2}, dots, z_0$ com $z'_{n-1} = z_{n-2}, \ldots z'_1 = z_0, z'_0 = y$ e $n \geq 2$ então podemos re-escrever a equação como

$$a_nz'_{n-1} + \ldots + a_2z'_1 + a_1z'_0 = -a_0y \tag{3.86}$$
$$z_{n-1} = z'_{n-2}, \ldots z_1 = z'_0, z_0 = y' \tag{3.87}$$

e podemos deduzir o sistema de n equações:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_0y \\ z_0 \\ vdots \\ z_{n-2} \end{pmatrix} \tag{3.88}$$

ou equivalentemente

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z_0 \\ \vdots \\ z_{n-2} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -a_0y \\ z_0 \\ \vdots \\ z_{n-2} \end{pmatrix} \tag{3.89}$$

Esta matriz tem a sub-diagonal abaixo da principal formada por 1's e apenas zeros abaixo desta sub-diagonal portanto o seu determinante vale a_n,

isto está errado, ver porque

Se estivesse certo a matriz do sistema se poderia decompor em blocos como

$$\begin{pmatrix} a_1 \cdots & a_n \\ \mathcal{I}_{n-1} & 0_{n-1} \end{pmatrix} \tag{3.90}$$

em que $\mathcal{I}_{n-1}$ é a matriz identidade de dimensão $n-1$ e 0_{n-1} é uma matriz-coluna de dimensão $n-1$.

que se for diferente de zero (o que garante se tratar de uma EDL de ordem n) terá n soluções linearmente independentes.

Encontramos assim uma equação matricial da forma

$$Au' = Bu$$

equivalente à equação diferencial linear.

Este exercícios nos conduziram a um resultado que vamos agora aprimorar. Primeiro vamos fazer uma síntese do que conseguimos.

A partir de uma equação diferencial linear de ordem n obtivemos um sistema de n equações diferenciais lineares de primeira ordem. Claro, é preciso salientar que a dificuldade intrínseca da resolução das equações lineares não ficou resolvida, uma vez que resolver um sistema de equações lineares é equivalente a resolver uma equação polinomial em que grau e ordem coincidem. Mas alguma coisa se ganhou, por exemplo agora estamos mais perto de compreender a questão da existência de $m \; ; \; m \leq n$ soluções linearmente independentes numa equação linear de ordem n.

Conseguimos um resultado *deselegante* e a elegância dos resultados é um parâmetro de certeza em Matemática: *resultados bonitos provavelmente estão corretos* e vice-versa, um resultado esteticamente comprometido sugere que algo mais deve ser feito, pelo menos ...

Sabemos que uma EDL de ordem n equivale a um sistema de equações da forma

$$Au' = Bu$$

e vamos ver que podemos fazer desaparecer a matriz B.

Pela construção feita, apenas substituímos na equação diferencial de ordem n inicial a variável y à qual se aplicava iteradamente o operador diferencial D por outras variáveis que guardavam esta operação num método seqüencial:

$$z_0 = y' \; ; \; z_1 = z'_0 \ldots$$

isto garante o formato da matriz que obtivemos com segunda sub-diagonal (abaixo da diagonal principal) formada apenas com 1's.

Na primeira linha da matriz se encontram os coeficientes da EDL original com exceção de um que foi parar na matriz de dados.

A "matriz das variáveis" contem todas as variáveis que precisamos traduzir sucessivamente as derivadas formando um vetor de dimensão n, a mesma ordem da equação primitiva. Há autores que usam um sistema de índices que traduz isto melhor, e nós vamos chegar no mesmo ponto, começamos com um vetor sem índice e passamos para o vetor de índice zero.

A matriz assim construída tem por equação característica a equação característica da equação diferencial (por isto o nome).

Demonstramos assim o teorema:

Teorema **6** *Sistema de equações diferenciais lineares*
Uma EDL homogênea, de ordem n é equivalente a um sistema de equações lineares de primeira ordem. A equação característica da EDL sendo a mesma equação característica da matriz do sistema.

O estudo da matriz A permite uma análise qualitativa da equação diferencial. Isto é estudado no contexto de Sistemas Dinâmicos que vai ser o assunto do próximo capítulo deste livro.

Resumo: Solução da equação linear de primeira ordem não homogênea $y' + p(x)y = q(x)$

$$y = C\exp(-P(x)) + \exp(-P(x))\int q(x)\exp(P(x))dx \tag{3.91}$$

Gráficos de curvas.

3.4 Soluções e gráficos.

1. Resolva e faça os gráficos de algumas curvas-solução:

$$(1 + x^2)y' + 2xy = 3x^2$$

3.5 Problemas.

1. dinâmica de fluidos I

   (a) Considere dois depósitos idênticos, D_1, D_2, e que o líquido contido em D_1 vaza para D_2 a uma velocidade que é proporcional (diretamente) ao volume $V_1(t)$ do líquido contido em D_1. Suponha que inicialmente D_2 esteja vazio e seja $V_1(0)$ o volume inicial em D_1. Encontre a equação do volume do líquido $V_2(t)$ no depósito D_2 no instante t considerando que também o líquido em D_2 vaza com velocidade proporcional ao volume contido no depósito.

   (b) Faça o gráfico da solução da equação anterior.

   (c) Expresse a equação do fluxo do líquido de D_1 para D_2 em termos da altura x de D_1.

2. dinâmica de fluidos II

   (a) Considere dois tanques, A, B. O tanque A contendo água salgada a razão de 10 Kg de sal por 100 litros d'água e o tanque B inicialmente com 100 litros de água pura. Suponha que a água do tanque B esteja vazando a velocidade de 3 litros por minuto enquanto que a água do tanque A esteja vazando para dentro do tanque B à velocidade de 5 litros por minuto. Quantos quilos de sal se dissolvem no tanque B depois de uma hora? Suponha que as soluções sejam homogêneas e que a capacidade do tanque B suporte todo o líquido que flui de A.

   (b) Faça o gráfico da solução da equação anterior.

3. dinâmica biológica O peso de um certo animal cresce à razão

$$w'(t) = Cs(t) - K \tag{3.92}$$

   em que $s(t)$ é a quantidade de alimento que o animal recebe e K, C são constantes específicas da raça do animal.

   (a) Suponhamos que $s(0), w(0)$ sejam positivos e que se $s(t)$ se tornar zero em algum ponto t_0 se tornará zero daí em diante. Descreva com suas palavras o que signfica isto.

   (b) Que pode significar (descreva com suas palavras) se $w(t_1), t_1 > 0$ se anular (e então deverá continuar nulo daí em diante.

   (c) Quanto mais o animal pegar peso, mais irá comer (síndrome dos gordos) e vamos supor que $s'(t) = As(t) - Bw(t)$ duas constantes observáveis que dependem da raça do animal. Descreva com suas palavras o que esta equação expressa.

   (d) Mostre que se $A^2 - 4BC < 0$ então o animal irá morrer de fome depois de alguns cíclos de dieta ou excesso alimentar.

3.6 Equações diferenciais lineares de primeira ordem II.

Solução.

Resumo: Solução da equação linear de primeira ordem não homogênea

$$y' + p(x)y = q(x).$$

$$y = Ce^{-P(x)} + e^{-P(x)}\int q(x)e^{P(x)}dx \tag{3.93}$$

Gráficos de curvas.

3.6.1 Soluções e gráficos.

1. Resolva e faça os gráficos de algumas curvas-solução:

$$(1 + x^2)\ y' + 2xy = 3x^2$$

Solução 28 *Colocando a equação no formato padrão:*

$$y' + \frac{2x}{1+x^2}\ y = \frac{3x^2}{1+x^2}$$

calculando a integral

$$P(x) = \int p(x)dx = \int \frac{2x}{1+x^2}dx = ln(1+x^2) = ln((1+x^2)).$$

Assim $exp(-P(x)) = \frac{1}{1+x^2}$; $exp(P(x)) = (1+x^2)$. *Colocadas estas expressões na fórmula (eq. , 3.105) temos:*

$$y = f_C(x) = \frac{C+x^3}{1+x^2}$$

da qual faremos alguns gráficos para distintos valores de C *usando Gnuplot a partir de um programa em Python. Não custa nada analisarmos a expressão de* $y = f_C$, *para uma previsão dos resultados dos gráficos. O denominador é positivo, estritamente, o torna o domínio da equação o conjunto de todos os números reais. Como o numerador é um polinômio de grau maior, seu comportamento no infinito é dominante e os gráficos terão a primeira bissetriz como assíntota no infinito. O comportamento perto de zero depende do valor de* C. *Se* $C = 0$ *o gráfico é semelhante ao de* $y = x^3$. *Se* $C \neq 0$ *haverá duas variantes de gráficos consoante* C *seja positivo ou negativo. Veja a figura (fig. , 3.6), página 117, em que se tem o gráfico dum conjunto de soluções quando a constante de integração varia entre* $C = -10$ *e* $C = 10$ *com passo* 0.1. *Na figura (fig. 3.7), página, 118, se tem o gráfico da curva correspondente a* $C = 10$ *enquanto na figura (fig. 3.3), página 112, temos o gráfico quando a constante é:* $C = 5$.

3.6.2 Problemas.

1. Considere dois depósitos idênticos, D_1, D_2, e que o líquido contido em D_1 vaze para D_2 a uma velocidade que é proporcional (diretamente) ao volume $V_1(t)$ do líquido contido em D_1. Suponha que inicialmente D_2 esteja vazio e seja $V_1(0)$ o volume inicial em D_1. Encontre a equação do volume do líquido $V_2(t)$ no depósito D_2 no instante t considerando que também o líquido em D_2 vaza com velocidade proporcional ao volume contido no depósito.

Solução 29 *Vamos resolver a questão num cenário mais geral em que o depósito* D_2 *não se encontre vazio e contenha um líquido diferente do vaza de* D_1. *Tiraremos a solução da questão como um caso particular. A velocidade com que o líquido vaza do depósito* D_1 *é* $V_1' = -k_1V_1(t)$; $k_1 > 0$, *portanto a velocidade decresce proporcionalmente ao volume do líquido. A constante* k_1 *é específica do líquido e corresponde a sua viscosidade que fará com que o líquido flua mais ou menos rapidamente, (ou em outras palavras, corresponde a energia interna do líquido e correspondente adesão*

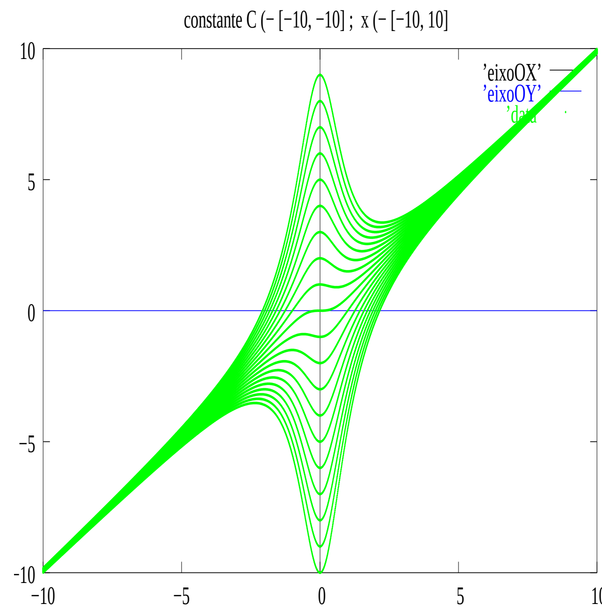


Figura 3.1: Solução com a constante $C \in [-10, 10] passo 0.1$.

entre as moléculas). Identicamente, $V_2' = -k_2V_2(t)$; $k_2 > 0$, *<u>entretanto</u>, agora, com o acréscimo de velocidade do vazamento que vem de* D_1, *logo, corrigindo:*

$$V_2' = -k_2V_2(t) - V_1' \ ; \tag{3.94}$$

$$V_2' = -k_2V_2(t) + k_1V_1(t) \ ; \ k_2, k_1 > 0. \tag{3.95}$$

Precisamos de resolver em cascata duas equações diferenciais, um sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem*:*

$$\begin{cases} V_1'(t) = -k_1V_1(t) \\ V_2' = -k_2V_2(t) + k_1V_1(t) \end{cases} \tag{3.96}$$

Resolvendo a primeira:

$$V_1'(t) = -k_1V_1(t) \leq 0 \ \Rightarrow \ V_1(t) = C_1e^{-k_1t} \tag{3.97}$$

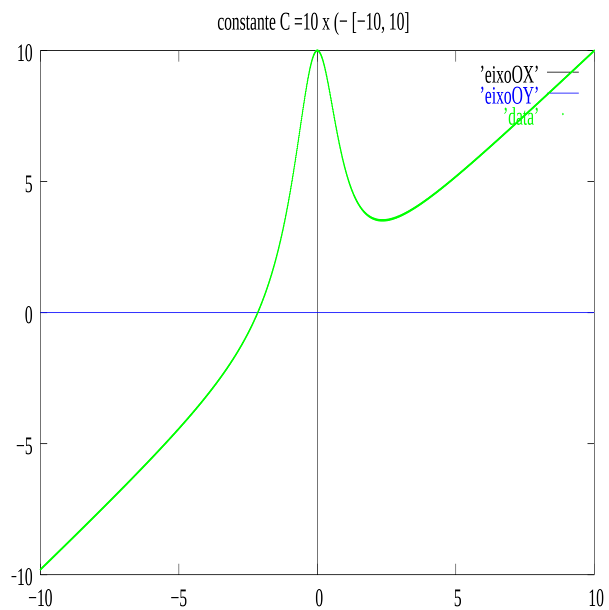


Figura 3.2: Solução com a constante $C = 10$.

em que $C_1 = V_1(0)$ é o volume inicial do primeiro depósito. Agora temos uma equação diferencial de primeira ordem completa para resolver:

$$V_2^{'}(t) + k_2V_2(t) = k_1V_1(t) = k_1C_1e^{-k_1t}; \tag{3.98}$$

$$V_2^{'}(t) + k_2V_2(t) = k_1C_1e^{-k_1t}; \tag{3.99}$$

Integrando[6] $p(t) = k_2 \;\Rightarrow\; P(t) = k_2t + C$. *A solução da equação diferencial será então:*

$$V_2(t) = Ce^{-k_2t} + k_1C_1e^{-k_2t}\int e^{(k_2-k_1)t}dt = \tag{3.100}$$

$$= Ce^{-k_2t} + \frac{k_1C_1}{k_2-k_1}e^{-k_1t} \; ; \tag{3.101}$$

[6] p, q são os coeficientes da equação linear escrita em sua forma padrão, consulte a lista de exercícios anterior.

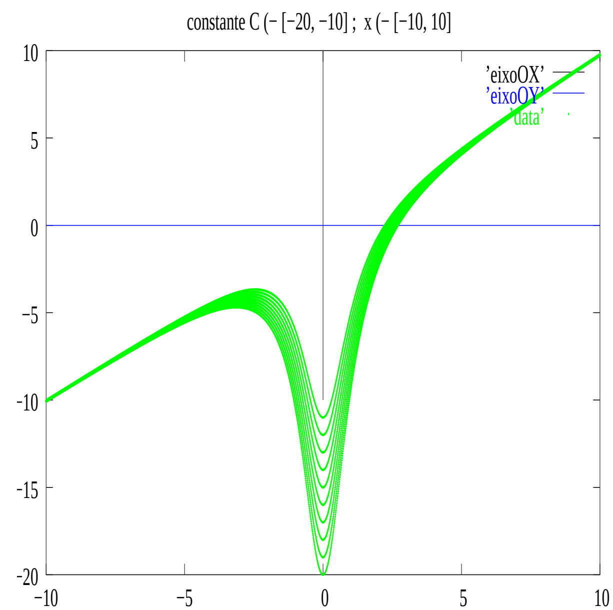


Figura 3.3: Solução com a constante $C = 5$.

$$C \in \mathbf{R} \; ; \; k_1, k_2, C_1 \in \mathbf{R}^{++}. \tag{3.102}$$

Vemos que a solução é uma combinação linear das funções e^{-k_1t}, e^{-k_2t}.

Um problema ocorre se as duas constantes k_1, k_2 forem iguais. Estas constantes representam o coeficiente de viscosidade do fluido e se forem iguais corresponde à formulação do problema em que D_2 se encontre vazio ou contenha o mesmo líquido que D_1, portanto não há duas constantes diferentes de viscosidade. Neste caso as duas exponenciais multiplicadas dentro da integral colapsam para a constante 1.

O caso em que $k_1 = k_2$.

Temos a equação:

$$V_2^{'} + kV_2 = kC_1e^{-kt} \; ; C_1 = V_1(0),$$

cuja solução será, (substituindo na fórmula):

$$V_2 = Ce^{-kt} + kC_1te^{-kt}\ ;\ C \in \mathbf{R}, k_1, k_2, C_1 \in \mathbf{R}^{++}.$$

Gráficos das curvas solução.

Nos gráficos 3.9, página 122 fizemos a simulação variando o volume do segundo depósito D_2 sob a hipótese de que ele contivesse um líquido diferente do outro. Neste caso dois coeficientes de viscosidade foram considerados. Nos gráficos (fig. **??***) (fig.* **??***) , páginas* **??***,* **??***, fizemos a simulação variando o volume do segundo depósito D_2 mas agora sob a hipótese de que este segundo depósito contivesse o mesmo líquido que o primeiro, conseqüentemente o coeficiente de viscosidade é o mesmo. Como um caso particular se obtém a questão do exercício, quando $C = 0$.*

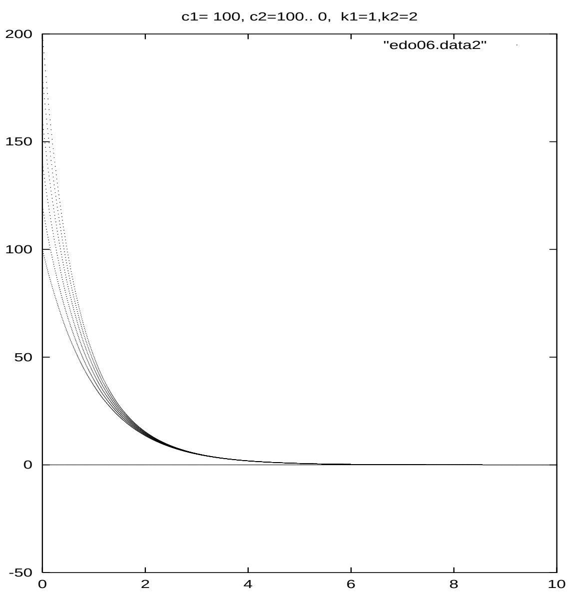


Figura 3.4: Constantes de viscosidade $k_1 = 0.5, k_2 = 0.7$ e volumes iniciais $C_1 = 100, C_2 = 100..0$.

2. Faça o gráfico da solução da equação anterior.

   Solução 30 *Ver gráficos páginas* **??** *e 122*

3. Considere dois tanques, A, B. O tanque A contendo água salgada a razão de 10 Kg de sal por 100 litros d'água e o tanque B inicialmente com 100 litros de água pura. Suponha que a água do tanque B esteja vazando a velocidade de 3 litros por minuto enquanto que a água do tanque A esteja vazando para dentro do tanque B à velocidade de 5 litros por minuto. Quantos quilos de sal se dissolvem no tanque B depois de uma hora? Suponha que as soluções sejam homogêneas e que a capacidade do tanque B suporte todo o líquido que flui de A.

   Solução 31 *O tanque B recebe do tanque A* $\frac{5}{100}5kg/min = 0.5kg$ *por minuto, e perde sal a razão de* $\frac{3}{100+2t}v(t)kg/min$.
   Assim a velocidade com que o sal se dilui no tanque B é:

   $$v'(t) = 0.5 - \frac{3}{100+2t}v(t)$$

   e colocando esta equação diferencial na forma normal temos:

   $$v' + \frac{3}{100+2t}v = 0.5$$

   cuja solução é:

   $$v(t) = \frac{C}{(100+2t)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(100+2t)^{\frac{3}{2}}}\int 0.5(100+2t)^{\frac{3}{2}}dt = \quad (3.103)$$

   $$= v(t) = \frac{C}{(100+2t)^{\frac{3}{2}}} + 0.1(100+2t) \quad (3.104)$$

   As curvas soluções são de dois tipos:

   (a) Quando $C = 0$ a reta de equação $y = 0.2t + 10$.

   (b) Quando $C \neq 0$ é uma hipérbole de grau fracionário $\frac{3}{2}$, logo com uma raiz quadrada, portanto, com domínio restrito a $t > -50$. Ver gráficos abaixo.

   Determinação da solução particular.

   Para determinar uma solução particular da equação temos que encontrar o valor da constante C que corresponda a esta solução particular o que se faz com o uso da condição inicial $v(0) = 0$ correspondente ao volume `zero` *inicial de água no tanque B:*

   $$v(0) = \frac{C}{1000} + 0.1 * 100 = \frac{C}{1000} + 10 = 0 \ \Rightarrow\ C = -10000.$$

4. Faça o gráfico da solução da equação anterior.

   Solução 32 *Nos gráficos páginas* **??** *e 115, usamos as constantes $C = -10000$, (graf. ,* **??***) e $C = 10000$ no (graf. , 3.5).*

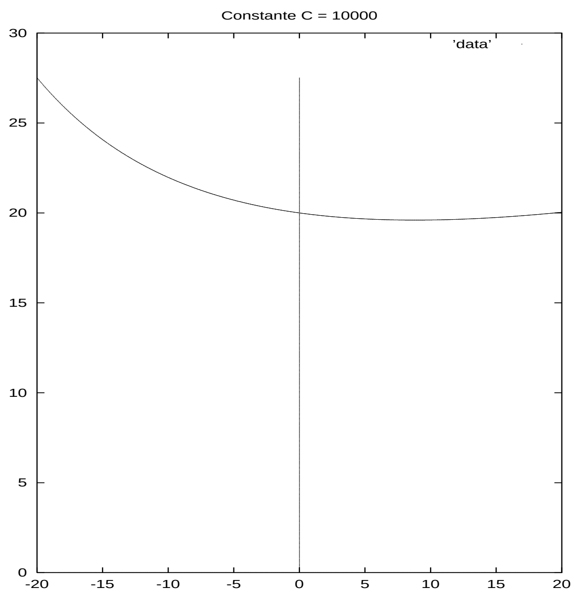


Figura 3.5: Quando C = 10000

3.7 Soluções e gráficos.

A solução que a seguir apresentamos de alguns exercícios é um complemento aos próprios exercícios que entendemos serem item de laboratório em que você ganhou uma experiência concreta no trato com as equações diferenciais.

Ao resolvermos as questões da lista de exercícios acima, iremos construir alguns gráficos com o intuito de lhe passar o significado da solução de uma equação diferencial, *uma curva, que responde a uma* condição inicial, *portanto, entre a infinidade de soluções que tem uma* equação diferencial, *existe em geral uma "pequena" família de curvas que responde às* condições de um determinado problema. *Em geral não é uma* solução única *que se procura, mas uma família que depende um parâmetro e este parâmetro varia dentro de um intervalo admissível.*

As palavras chave desta seção são: família de curvas, família dependente de parâmetro, intervalo admissível, condição inicial ou condições de fronteira. *O leitor irá aos poucos compreender o significado destas palavras, dentro do contexto.*

Alguns valores que atribuímos à condição inicial por alguma razão ligada ao problema que estamos estudando, representa o parâmetro *que varia e define uma família que depende de um parâmetro.*

Claro, onde falamos de condição inicial *muitas vezes se fala de* condições de fronteira *em equações diferenciais de ordem maior.*

A variação da condição inicial *representa um processo experimental em que o pesquisador toma decisões, analisando o comportamento de uma família de curvas procurando aquela que melhor se adapte às condições do problema que ele precisa resolver.*

Os gráficos foram feitos com Gnuplot depois de criada uma tabela com um programa em Python, num ambiente de trabalho Debian GNU/LinuX rodando num processador Athlon 2.0 GHz

Solução da equação linear de primeira ordem não homogênea $y' + p(x)y = q(x)$

$$y = C\exp(-P(x)) + \exp(-P(x)) \int q(x)\exp(P(x))dx \tag{3.105}$$

Gráficos de curvas.

1. A solução e gráficos de algumas curvas-solução de

$$(1+x^2)\ y' + 2xy = 3x^2$$

Solução 33 *Colocando a equação no formato padrão:*

$$y' + \frac{2x}{1+x^2}\ y = \frac{3x^2}{1+x^2}$$

calculando a integral

$$P(x) = \int p(x)dx = \int \frac{2x}{1+x^2}dx = ln(1+x^2).$$

Assim $exp(-P(x)) = \frac{1}{1+x^2}$; $exp(P(x)) = (1+x^2)$*. Colocadas estas expressões na fórmula (eq. , 3.105) temos:*

$$y = f_C(x) = \frac{C+x^3}{1+x^2}$$

da qual faremos alguns gráficos para distintos valores de C *usando Gnuplot a partir de um programa em Python. A representação gráfica das soluções de equações diferenciais, representam, muitas vezes, o método de escolha da condição inicial.*

Vamos representar graficamente a expressão de $y = f_C$*, para uma previsão dos resultados dos gráficos. O denominador é positivo, estritamente, o torna o domínio da equação o conjunto de todos os números reais. Como o numerador é um polinômio de grau maior, seu comportamento no infinito é dominante e os gráficos terão a primeira bissetriz como assíntota no infinito. O comportamento perto de zero depende do valor de* C*. Se* $C = 0$ *o gráfico é semelhante ao de* $y = x^3$*. Se* $C \neq 0$ *haverá duas variantes de gráficos consoante* C *seja positivo ou negativo. Veja a figura (fig. , 3.6),* *página 117, em que se tem o gráfico dum conjunto de soluções quando a constante de integração varia entre $C = -10$ e $C = 10$ com passo 0.1. Na figura (fig. 3.7), página, 118, se tem o gráfico da curva correspondente a $C = 10$.*

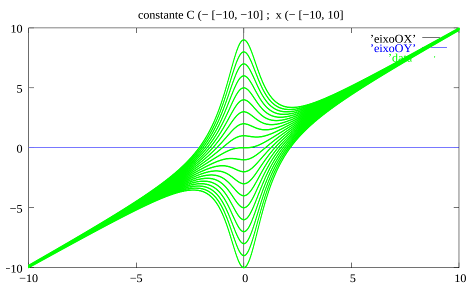


Figura 3.6: Solução constante $k1 = 1; k2 = 2; C2 \in [-10, 10]; passo = 1$.

2. Considere dois tonéis A,B contendo óleo e que ambos os tonéis estejam vazando seu conteúdo numa razão que é proporcional ao volume do óleo. Chame de K esta constante de proporcionalidade que é específica do óleo. Além disto assuma que o conteúdo de A vaza para dentro de B e que B se encontrava inicialmente vazio,

$$V_A(0) = a_0 \neq 0 \ ; \ V_B(0) = 0$$

Calcule o volume $V_B(t) \ ; \ t > 0$.

Solução 34 *Como o volume está dimininuindo então a velocidade é negativa:*

$$V_A'(t) = -KV_A(t) \longrightarrow V_A(t) = a_0 exp(-Kt)$$

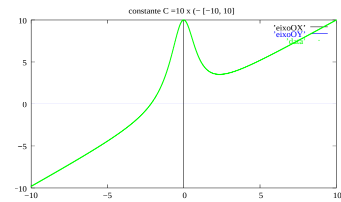


Figura 3.7: Solução com a constante $C = 10; x \in [-10, 10]$.

$$V_B'(t) = -KV_B(t) - KV_A(t) = -K(V_B(t) - a_0 exp(-Kt))$$
$$V_B'(t) + KV_B(t) = a_0 K exp(-Kt)$$
$$p(t) = K; P(t) = Kt; q(t) = a_0 K exp(-Kt)$$
$$V_B(t) = exp(-P(t)) \int_{t_0}^{t} a_0 K exp(-Kt) exp(P(t)) dt$$
$$V_B(t) = exp(-P(t)) \int_{t_0}^{t} a_0 K dt$$
$$V_B(t) = exp(-P(t)) a_0 K(t - t_0)$$
$$t_0 = 0 \longrightarrow V_B(t) = \frac{a_0 K t}{exp(P(t))}$$

3. Considere dois tanques, A,B. O tanque A contém 1000 litros de água salgada na proporção de 4kg de sal por 100 litros d'água, enquanto que o tanque B tem 1000 litros de água pura.

   A água do tanque A é derramada no tanque B num fluxo de 13 litros por minuto enquanto que a água do tanque B é derramada n'outro tanque num fluxo de 10 litros por minuto. Quantos quilos de sal se dissolvem no tanque B ao final de uma hora ? Suponha que as soluções sejam homogêneas e que a capacidade do tanque B suporte todo o líquido que flui de A.

   Solução 35 *O tanque B recebe sal num fluxo constante de $0.52kg/m$*

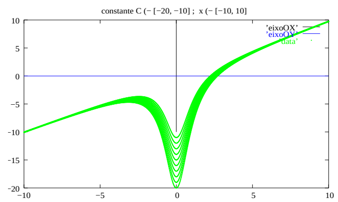


Figura 3.8: Solução com a constante $C \in [-20, -10]; passo1$.

equivalente ao fluxo do sal que sai do tanque A:

$$40kg\frac{13}{1000} = 0.52kg,$$

e perde sal em forma diretamente proporcional *ao fluxo da água que dele vaza, 10 litros por minuto* e inversamente proporcional *à quantidade de água que nele se encontra,* $\frac{1}{1000-(13-10)t}$, *quer dizer* $\frac{10S(t)}{1000-3t}$ *portanto*

$$S'(t) = 0.52kg/m - \frac{10S(t)}{1000-3t}kg/m$$

O volume de sal $S(t)$ *perdido pelo tanque B a razão* $\frac{10}{1000-(13-10)t}$

$$S'(t) + \frac{10S(t)}{1000-3t} = 0.52$$
$$p(t) = \frac{10}{1000-3t}\ ;\ q(t) = 0.52$$
$$P(t) =$$

---

4. Considere dois depósitos idênticos, D_1, D_2, e que o líquido contido em D_1 vaze para D_2 a uma velocidade que é proporcional (diretamente) ao volume $V_1(t)$ do líquido contido em D_1. Suponha que inicialmente D_2 esteja vazio e seja $V_1(0)$ o volume inicial em D_1. Encontre a equação do volume do líquido $V_2(t)$ no

depósito D_2 no instante t considerando que também o líquido em D_2 vaza com velocidade proporcional ao volume contido no depósito.

Solução 36 *Vamos resolver a questão num cenário mais geral em que o depósito* D_2 *não se encontre vazio e contenha um líquido diferente do que vaza de* D_1. *Tiraremos a solução da questão como um caso particular.*

A velocidade com que o líquido vaza do depósito D_1 *é*

$$V_1^{'} = -k_1V_1(t)\ ;\ k_1 > 0,$$

portanto a velocidade decresce proporcionalmente ao volume do líquido.

A constante k_1 *é específica do líquido e corresponde a sua viscosidade que fará com que o líquido flua mais ou menos rapidamente, (ou em outras palavras, corresponde a energia interna do líquido, a adesão entre as moléculas).*

Identicamente,

$$V_2^{'} = -k_2V_2(t) + V_1^{'}\ ;\ k_2 > 0,$$

agora com o acréscimo de velocidade do vazamento que vem de D_1, *logo,*

$$V_2^{'} = -k_2V_2(t) + V_1^{'}\ ; \tag{3.106}$$
$$V_2^{'} = -k_2V_2(t) + k_1V_1(t)\ ;\ k_2, k_1 > 0. \tag{3.107}$$

Precisamos de resolver em cascata duas equações diferenciais, um sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem*:*

$$\begin{cases} V_1'(t) & = -k_1V_1(t) \\ V_2^{'} & = -k_2V_2(t) \quad +k_1V_1(t) \end{cases} \tag{3.108}$$

Resolvendo a primeira:

$$V_1'(t) = -k_1V_1(t) \quad \Rightarrow \quad V_1(t) = C_1e^{-k_1t} \tag{3.109}$$
$$C_1 = V_1(0) \tag{3.110}$$

em que $C_1 = V_1(0)$ *é o volume inicial do primeiro depósito. Temos uma equação diferencial de primeira ordem completa para resolver:*

$$V_2^{'}(t) + k_2V_2(t) = k_1V_1(t) = k_1C_1e^{-k_1t}; \tag{3.111}$$
$$V_2^{'}(t) + k_2V_2(t) = k_1C_1e^{-k_1t}; \tag{3.112}$$

Integrando[7]

$$p(t) = k_2 \quad \Rightarrow \quad P(t) = k_2t + C \quad q(t) = k_1C_1e^{-k_1t} \tag{3.113}$$

[7] p, q são os coeficientes da equação linear escrita na forma padrão.

A solução da equação diferencial é

$$V_2(t) = k_1C_1e^{-k_2t}\int e^{(k_2-k_1)s}ds = \qquad (3.114)$$
$$k_1C_1e^{-k_2t}\frac{e^{(k_2-k_1)t}}{k_2-k_1} + C_2k_1C_1e^{-k_2t} = \qquad (3.115)$$
$$k_1C_1\frac{e^{-k_1t}}{k_2-k_1} + Ck_1C_1e^{-k_1t} \qquad (3.116)$$

Se as duas constantes k_1, k_2 forem iguais, na equação (eq. 3.115 as duas exponenciais multiplicadas dentro da integral colapsam para a constante 1 *o que nos dá a solução*

$$k_1C_1xe^{-k_2x}$$

Observação 2 *Quando as duas constantes k_1, k_2 forem iguais*

Um problema ocorre se as duas constantes k_1, k_2 forem iguais. Estas constantes representam o coeficiente de viscosidade do fluido e se forem iguais corresponde à formulação do problema em que D_2 se encontre vazio ou contenha o mesmo líquido que D_1, portanto não há duas constantes diferentes de viscosidade. Neste caso as duas exponenciais multiplicadas dentro da integral colapsam para a constante 1.

O caso em que $k_1 = k_2$.

Temos a equação:

$$V_2' + kV_2 = kC_1e^{-kt} \; ; C_1 = V_1(0),$$

cuja solução será, (substituindo na fórmula):

$$V_2 = Ce^{-kt} + kC_1te^{-kt} \; ; \; C \in \mathbf{R}, k_1, k_2, C_1 \in \mathbf{R}^{++}.$$

Gráficos das curvas solução.

Nos gráficos 3.9, página 122 fizemos a simulação variando o volume do segundo depósito D_2 sob a hipótese de que ele contivesse um líquido diferente do outro. Neste caso dois coeficientes de viscosidade foram considerados. Nos gráficos (fig. **??***) (fig.* **??***) , páginas* **??***,* **??***, fizemos a simulação variando o volume do segundo depósito D_2 sob a hipótese de que este segundo depósito contivesse o mesmo líquido que o primeiro, conseqüentemente o coeficiente de viscosidade é o mesmo. Como um caso particular se obtém a questão do exercício, quando $C = 0$.*

5. Faça alguns gráficos para soluções das equações diferenciais acima.

Solução 37 *Ver gráficos páginas* **??** *e 122*

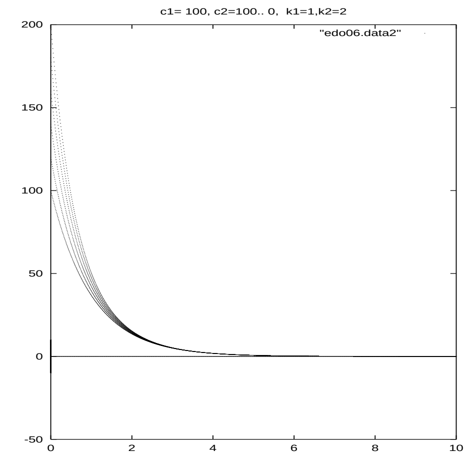


Figura 3.9: Constantes de viscosidade $k_1 = 0.5, k_2 = 0.7$ e volumes iniciais $C_1 = 100, C_2 = 100..0$.

6. Considere dois tanques, A, B. O tanque A contendo água salgada a razão de 10 Kg de sal por 100 litros d'água e o tanque B inicialmente com 100 litros de água pura. Suponha que a água do tanque B esteja vazando a velocidade de 3 litros por minuto enquanto que a água do tanque A esteja vazando para dentro do tanque B à velocidade de 5 litros por minuto. Quantos quilos de sal se dissolvem no tanque B depois de uma hora? Suponha que as soluções sejam homogêneas e que a capacidade do tanque B suporte todo o líquido que flui de A.

Solução 38 *O tanque B recebe do tanque A $\frac{5}{100}5kg/min = 0.5kg$ por minuto, e perde sal a razão de $\frac{3}{100+2t}v(t)kg/min$.*

Assim a velocidade com que o sal se dilui no tanque B é:

$$v'(t) = 0.5 - \frac{3}{100+2t}v(t)$$

e colocando esta equação diferencial na forma normal temos:

$$v' + \frac{3}{100+2t}v = 0.5$$

cuja solução é:

$$v(t) = \frac{C}{(100+2t)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(100+2t)^{\frac{3}{2}}}\int 0.5(100+2t)^{\frac{3}{2}}dt = \qquad (3.117)$$
$$= v(t) = \frac{C}{(100+2t)^{\frac{3}{2}}} + 0.1(100+2t) \qquad (3.118)$$

As curvas soluções são de dois tipos:

(a) *Quando $C = 0$ a reta de equação $y = 0.2t + 10$.*

(b) *Quando $C \neq 0$ é uma hipérbole de grau fracionário $\frac{3}{2}$, logo com uma raiz quadrada, portanto, com domínio restrito a $t > -50$. Ver gráficos abaixo.*

Determinação da solução particular.

Para determinar uma solução particular da equação temos que encontrar o valor da constante C que corresponda a esta solução particular o que se faz com o uso da condição inicial $v(0) = 0$ correspondente ao volume `zero` *inicial de água no tanque B:*

$$v(0) = \frac{C}{1000} + 0.1 * 100 = \frac{C}{1000} + 10 = 0 \ \Rightarrow \ C = -10000.$$

7. Faça o gráfico da solução da equação anterior.

Solução 39 *Nos gráficos páginas 115 e 115, usamos as constantes $C = -10000$, (graf. , 3.5) e $C = 10000$ no (graf. , 3.5).*

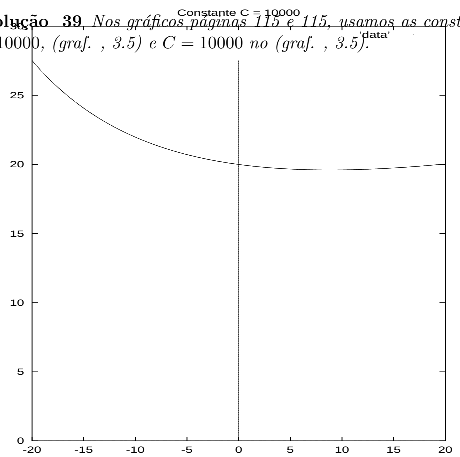


Figura 3.10: Quando C = 10000

3.8 Exercícios - sistemas lineares

$\square$

1. Encontre um sistema de equações de primeira ordem que seja equivalente à equação
$$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{dy}{dx} = 0$$
e resolva a equação

Solução:

$$\frac{dy}{dx} = z \tag{3.119}$$

$$\frac{dz}{dx} = w = \frac{d^2y}{dx^2} \tag{3.120}$$

$$\frac{dw}{dx} = z = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{dy}{dx} \tag{3.121}$$

Este sistema pode ser escrito na forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} y \\ z \\ w \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} y \\ z \\ w \end{pmatrix} \tag{3.122}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.123}$$

Calculando as potências de A com *scilab*.

```
   A = [0,1,0; 0,0,1;0,1,0]
 A  =

!   0.    1.    0. !
!   0.    0.    1. !
!   0.    1.    0. !

-->A*A
ans  =

!   0.    0.    1. !
!   0.    1.    0. !
!   0.    0.    1. !

-->ans*A = A*A*A = A
ans  =

!   0.    1.    0. !
!   0.    0.    1. !
!   0.    1.    0. !
```

e vemos que A

$$A^k \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

que são duas matrizes linearmente independentes então as somas parciais da série de potências

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k\geq 1} \frac{A^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k\geq 1} \frac{A^{2k-1}}{(2k-1)!} \tag{3.124}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \sum_{k\geq 1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} & 0 \\ 0 & 1 & \sum_{k\geq 1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} \\ 0 & \sum_{k\geq 1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sum_{k\geq 0} \frac{x^{2k}}{2k!} \\ 0 & \sum_{k\geq 0} \frac{x^{2k}}{2k!} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k\geq 0} \frac{x^{2k}}{2k!} \end{pmatrix} \tag{3.125}$$

2.

3.

Exercícios 15 *Equações diferenciais lineares*

1. *Equações de Bernouilli*
2. *Considere $\alpha \notin \{0, 1\}$ e uma equação da forma*

$$y' = a(x)y + b(x)y^{\alpha}$$

em que a, b são funções integráveis. Transforme esta equação em

$$y'y^{-\alpha} = a(x)y^{1-\alpha} + b(x).$$

Dividindo por y^{α} e verifique que resulta numa equação é da forma

$$z' = a(x)z + b(x)$$

Encontre a solução.

Solução 1

$$y'y^{-\alpha} = a(x)y^{1-\alpha} + b(x)$$
$$\text{se } z = y^{1-\alpha 1} \text{ então } z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$$
$$z' = a(x)z + b(x)$$

é uma equação dif. linear não homogênea de primeira ordem.

3. *Equações de Ricatti As equações de Ricatti são as equações da forma*

$$y' + a(x)y^2 + b(x)y + c(x) = 0$$

Mostre que se conhecermos uma solução particular, y_0 da equação de Ricatti, a substituição

$$y = y_0 + z$$

a transforma numa equação de Bernouilli.

Solução 2

$$(y_0 + z)' + a(x)(y_0 + z)^2 + b(x)(y_0 + z) + c(x) = 0$$
$$y_0' + z' + a(x)(y_0^2 + 2y_0z + z^2) + b(x)y_0 + b(x)z + c(x) = 0$$
$$y_0' + a(x)y_0^2 + b(x)y_0 + c(x) + z' + 2a(x)y_0z + a(x)z^2 + b(x)z = 0$$
$$z' + 2a(x)y_0z + a(x)z^2 + b(x)z = 0$$
$$z' + (2a(x)y_0 + b(x))z + a(x)z^2 = 0$$
$$z' + A(x)z + B(x)z^2 = 0$$

sendo a última equação uma equação de Bernouilli com $\alpha = 2$.

(a)

(b)

4. *Escreva o sistema linear associado a cada uma das equações abaixo e o resolva.*

a) $y'' + y' + y = 0$	*b)* $y'' + y = 0$	*c)* $-y'' - 2y' - 3y = 0$
d) $y'' = 0$	*e)* $y'' + y' = 0$	*f)* $y'' - y' - y = 0$
g) $y''' + y'' + y = 0$	*h)* $y''' + y' + y = 0$	*i)* $3y'' + 2y' + y = 0$
j) $y'' + 2y' + 3y = 0$	*k)* $y''' - y'' - y' - y = 0$	*l)* $y''' = 0$

5. *Fator integrante*

   (a) *Nas equações seguintes, substitua $y \mapsto z = \mu y$ e desenvolva a expressão:*

   $$y' + p(x)y = q(x) \quad y'' + a(x)y' + b(x)y = d(x) \quad a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

   Examinando, em cada caso o resultado, faça hipótese sobre o fator μ de modo a reduzir a equação a um formato mais simples.

   observação Não se preocupe, neste momento na resolução das equações, elas voltarão a aparecer mais a frente quando estes cálculos serão aproveitados.

Solução 3

$$y \mapsto (\mu y) \Rightarrow y' + p(x)y = q(x) \tag{3.126}$$
$$(\mu y)' + p(x)\mu y = \mu' y + \mu y' + p(x)\mu y = q(x) \tag{3.127}$$
$$(\mu' p(x)\mu)y + \mu y' = q(x) \tag{3.128}$$
$$y \mapsto (\mu y) \Rightarrow y'' + a(x)y' + b(x)y = d(x) \tag{3.129}$$
$$(\mu y)'' + a(x)(\mu y)' + b(x)\mu y = \tag{3.130}$$
$$(\mu' y + \mu y')' + a(x)(\mu' y + \mu y') + b(x)\mu y = \tag{3.131}$$
$$\mu'' y + \mu' y' + \mu' y' + \mu y'' + a(x)(\mu' y + \mu y') + b(x)\mu y = \tag{3.132}$$
$$(\mu'' + a(x)\mu' + b(x)\mu)y + (2\mu' + \mu)y' + \mu y'' = d(x) \tag{3.133}$$
$$y \mapsto (\mu y) \Rightarrow a(x)y' + b(x)y = c(x) \tag{3.134}$$
$$a(x)(\mu y)' + b(x)\mu y = a(x)(\mu' y + \mu y') + b(x)\mu y = \tag{3.135}$$
$$(a(x)\mu' + b(x)\mu)y + \mu y' = c(x) \tag{3.136}$$

Fazendo a hipótese

i. $\mu' p(x)\mu = 0$ *caimos na equação mais simples*

$$\mu y' = q(x).$$

ii. $\mu'' + a(x)\mu' + b(x)\mu = 0$ *caimos na equação mais simples*

$$(2\mu' + \mu)y' + \mu y'' = d(x)$$

e se for possível adicionar a hipótese $2\mu' + \mu = 0$ *caimos ainda na equação ainda mais simples*

$$\mu y'' = d(x)$$

iii. $a(x)\mu' + b(x)\mu = 0$ *caimos na equação mais simples*

$$\mu y' = c(x)$$

(b) *Na equação* $y' + p(x)y = q(x)$ *substitua* $y := (z = \mu y)$ *e verifique que a hipótese "*μ é solução da equação linear homogênea de primeira ordem" *conduz a uma equação a* variáveis separáveis. *Calcule* μ.

Solução 4

$$\begin{aligned} z' + p(x)z = q(x) \equiv (\mu y)' + p(x)(\mu y) = q(x) \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \mu' y + \mu y + p(x)\mu y = q(x) \equiv \\ \equiv (\mu' + p(x)\mu)y + \mu y' = q(x) \equiv \\ \Longrightarrow \mu y' = q(x) \Longrightarrow y' = \tfrac{q(x)}{\mu} \Longrightarrow y = \int_{x_0}^{x} \tfrac{q(t)}{\mu} dt \Longrightarrow z = \mu y \end{aligned}$$

Como μ *é uma solução da homogênea associada, por hipótese, (sempre existe), então*

$$\begin{aligned} \mu' + p(x)\mu = 0 \Longrightarrow \tfrac{\mu'}{\mu} = -p(x) \\ ln(\mu) = -P(x) \Longrightarrow \mu = e^{-P(x)} \\ \mu = e^{-P(x)}\ ;\ P(x) = \int_{x_0}^{x} p(t)dt \end{aligned}$$

Substituindo na última equação do bloco anterior temos:

$$\begin{aligned} z = \mu y = \mu \int_{x_1}^{x} q(t)e^{P(t)}dt \\ y_{nh} = z = \tfrac{1}{e^P} \int_{x_1}^{x} q(t)e^{P(t)}dt \end{aligned}$$

Sendo a última linha acima uma solução particular da equação completa.

A solução geral da equação diferencial linear de primeira ordem é: $y = Cy_h + y_{nh}$ *em que* y_h *representa uma solução da homogênea e* y_{nh} *representa uma solução da não homogênea:*

$$y = \frac{C}{e^P} + \frac{1}{e^P}\int_{x_1}^{x} q(t)e^{P(t)}dt = \frac{1}{e^P}(C + \int_{x_1}^{x} q(t)e^{P(t)}dt) \equiv \frac{1}{e^P}\int_{x_1}^{x} q(t)e^{P(t)}dt$$

(c) *Aplique a hipótese enunciada acima sobre μ e resolva a equação resultante*[8]

$$z' + p(x)z = q(x)$$

Se convença que você resolver a equação original

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Solução 5 *Com a hipótese de que μ seja solução da equação homogênea associada, transforma a equação geral em 'variáveis separáveis:*

$$z' + p(x)z = q(x) \equiv (\mu y)' + p(x)(\mu y) = q(x) \Rightarrow \tag{3.137}$$
$$\Rightarrow \mu' y + \mu y' + p(x)\mu y = q(x) \equiv \tag{3.138}$$
$$\equiv (\mu' + p(x)\mu)y + \mu y' = q(x) \equiv \tag{3.139}$$
$$\Rightarrow \mu y' = q(x) \Rightarrow y' = \frac{q(x)}{\mu(x)} \Rightarrow \tag{3.140}$$
$$\Rightarrow y = \int \frac{q(t)}{\mu(t)}dt \tag{3.141}$$
$$\mu y = \mu \int \frac{q(t)}{\mu}dt \tag{3.142}$$

Como μ é uma solução da homogênea associada, por hipótese, (sempre existe), então

$$\mu' + p(x)\mu = 0 \longrightarrow \frac{\mu'}{\mu} = -p(x)$$
$$ln(\mu) = -P(x) \longrightarrow \mu = e^{-P(x)}$$
$$\mu = e^{-P(x)} \ ; \ P(x) = \int_{x_0}^{x} p(t)dt$$

Substituindo na última equação do bloco anterior temos:

$$z = \mu y = \mu \int_{x_1}^{x} q(t)e^{P(t)}dt$$
$$y_{nh} = z = \frac{1}{e^P} \int_{x_1}^{x} q(t)e^{P(t)}dt$$

Sendo a última linha acima uma solução particular da equação completa.

A solução da equação original é então

$$y = \frac{1}{\mu} \int \frac{q(t)}{\mu}dt \ ; \mu = e^{-P(x)}$$

[8] o fator μ obtido de acordo com a hipótese feita na questão anterior, se chama *fator integrante.*

sendo P uma primitiva particular de p, o coeficiente da equação original.

Isto pode ser verificado por inspeção direta:

$$\text{testando a solução } \mu \int \frac{q(t)}{\mu(t)}dt \tag{3.143}$$
$$(\mu \int \frac{q(t)}{\mu(t)}dt)' + p(x)\mu \int \frac{q(t)}{\mu}dt = \tag{3.144}$$
$$\text{como } \mu' = -p(x)\mu \text{ e } (\int \frac{q(t)}{\mu(t)}dt) = \frac{q(x)}{\mu(x)} \tag{3.145}$$
$$-p(x)\mu \int \frac{q(t)}{\mu}dt + \mu\frac{q(x)}{\mu(x)} + p(x)\mu \int \frac{q(t)}{\mu}dt = q(x) \tag{3.146}$$

6. *Verifique, por inspecção direta, que a combinação linear*

$$Ce^{-P(x)} + e^{-P(x)} \int q(x)e^{P(x)}dx$$

ésolução da equação diferencial linear completa de primeira ordem $z' + p(x)z = q(x)$.

7. *Resolva as equações seguintes, diretamente, sem uso da fórmula:*

$$y' + x^2y = x^3 \ ; \ y' + \frac{y}{x} = x^2 \ ; \ y' + xy = x^2$$

indicando o domínio de validade da solução.

8. *Teste a correção das soluções encontradas na questão anterior usando a fórmula.*

Capítulo 4

Soluções aproximadas de Equações Diferenciais

Vou colocar as soluções aproximadas usando séries e splines

4.1 Soluções splines de equações diferenciais ordinárias

A solução de uma *equação diferencial ordinária* é uma família de curvas contida em uma variedade de dimensão 2, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ que chamamos de *domínio da equação*:

$$\text{domínio da equação } \Omega \subset \mathbf{R}^n \text{ ; dimensão 2;} \tag{4.1}$$

$$t \in [a,b] \mapsto x_s(t) \subset \Omega; \text{ uma órbita} \tag{4.2}$$

$$\Gamma = \{x_s(t)\ ;\ s \in I\} \subset \mathrm{P}(\Omega) \tag{4.3}$$

em que

- conjunto de índices I é um intervalo aberto da reta, usado aqui como um conjunto de índices da família;
- intervalo de parametrização $[a,b]$ é o intervalo de parametrização comum a todos os membros da família de curvas,

satisfazendo ao Teorema de Existência e Unicidade, ver [2], garantindo que não há duas curvas da família Γ passando por um ponto da região Ω.

Nestas condições, ao usarmos um intervalo aberto da reta estas afirmações equivalem a dizer que a reunião sobre todos os membros (curvas) da família Γ é a variedade Ω em outras palavras as soluções da equação diferencial representam uma *fibração* da variedade Ω. Ainda, o conjunto das curvas é uma partição da variedade Ω, as órbitas, as curvas-solução, são classes de equivalência.

Se considerarmos um *intervalo fechado* como conjunto de índices isto conduz a que variedade Ω tenha uma *borda* e consequentemente esta borda deve ser uma solução, provavelmente singular, da equação diferencial, preferimos considerar, como caso geral, o conjunto de índices sendo um intervalo aberto.

Considere uma equação diferencial ordinária

$$F(t, x(t)) = 0 \tag{4.4}$$

em que F expressa as relações entre as componentes da curva x em termos de suas derivadas.

Dado um ponto $P = (a_1, \dots, a_n) \in \Omega$ se pudermos determinar uma curva

$$[a,b] \ni t_o \mapsto x_{s_o}(t_o) = P \in \Omega \tag{4.5}$$

$$s_o \in I\ ;\ x_{s_o} \in \Gamma\ ; \tag{4.6}$$

passando por P, diremos que resolvemos o problema com condição inicial P

$$\begin{cases} F(t_o, x_{s_o}(t_o) = 0\ ; P = x_{s_o}(t_o); \\ F(t, x(t)) = 0 \end{cases} \tag{4.7}$$

em outras palavras, encontramos uma curva da família Γ passando pelo ponto P.

Resolver um *problema* com condição inicial P consiste portanto em encontrar uma curva-solução passando pelo ponto P.

Como não temos meios para resolver este problema um caminho é procurar soluções aproximadas, e na próxima seção vou resolver um exemplo usando uma equação diferencial que sabemos resolver para usar a solução exata na comparação com a solução aproximada e assim analisar o funcionamento do método de aproximação polinomial que estou usando.

4.2 Um exemplo

Considere a equação

$$x(x-1)y' + y = x^2(2x-1) \tag{4.8}$$

que é uma equação linear de primeira ordem a coeficientes variáveis que pode ser escrita como

$$y' + q(x)y = p(x) \tag{4.9}$$

$$q(x) = \frac{1}{x(x-1)}\ ;\ p(x) = \frac{x(2x-1)}{x-1} \quad y' = f(x,y) = p(x) - q(x)y \tag{4.10}$$

Neste caso as *curvas-solução* são os $graf(f)$ em que f é uma integral da equação dada. A variedade Ω é uma região do plano cuja projeção no eixo OX é o intervalo $[a,b]$ portanto uma faixa do plano. As funções-coordenadas de uma solução tem por equações paramétricas $(x, f(x))$. Uma aproximação *splines* deste par de funções é uma aproximação splines de cada uma das coordenadas, portanto seria

$$(x, f(x)) \approx (P_1(x), P_2(x)) \tag{4.11}$$

em que P_1, P_2 na equação (11) são elementos do espaço $Spl_3(n-1)$. No caso da primeira coordenada todos os "pedaços" coincidem com a função do primeiro grau, a identidade sobre o subintervalo em questão, basta-nos, portanto nos preocupar com a fórmula da segunda coordenada

Suponhamos que uma condição inicial $P = (\alpha, \beta)$ seja dada para esta equação e no intervalo $[a, b]$ tenhamos uma base para $Spl_3(n-1)$ em que $[a, b]$ está no domínio de validade para esta equação, por exemplo $b < 1$.

Considere $f \in Spl_3(n-1)$ como em [**?**]

$$f \approx \sum_{k=1}^{n-1} \eta_k \in Spl_3(n-1) \tag{4.12}$$

em que η é a primitiva com condição $-\infty$ de um sinal 2-splines a suporte compacto equilibrado em volta do zero, e η_k são as translatadas-dilatadas de η tal que $\eta_k^{'}$ formam uma partição da unidade num aberto que contém $[a, b]$ identicamente 1 sobre $[a, b]$.

Suponhamos também que uma condição inicial seja dada

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **7** *3-splines solução aproximada*

Seja a família

$$\begin{cases} \eta_1^{'}(x_1) + q(x_1)y_1 = p(x_1) \\ \vdots \\ \eta_k^{'}(x_k) + q(x_k)y_k = p(x_k) \\ \vdots \\ \eta_k^{'}(x_n) + q(x_n)y_n = p(x_n) \end{cases} \tag{4.13}$$

$$\begin{cases} y_1 = \frac{p(x_1) - \eta_1^{'}(x_1)}{q(x_1)} \\ \vdots \\ y_k = \frac{p(x_k) - \eta_k^{'}(x_k)}{q(x_k)} \\ \vdots \\ y_n = \frac{p(x_n) - \eta_k^{'}(x_n)}{q(x_n)} \end{cases} \tag{4.14}$$

Vou agora selecionar o par (x_k, y_k) que esteja mais

Índice Remissivo

Referências Bibliográficas

[1] Stephen Smale Morris W. Hirsch. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra.* Academic Press, 1974.

[2] G.F. Simmons. *Differential Equations with Applications and Historical Notes.* McGraw-Hill - Book Company, 1979.